

111507

基本学库藏

你会不会三等分一角？

錢曾濤 著



中国青年出版社

青年数学叢書

你会不会三等分一角

錢 曾 濤 著

中国青年出版社

1956年·北京

你会不会三等分一角？

錢曾滿 著

*

中國青年出版社出版

(北京東四12條老君堂11號)

北京市書刊出版業營業許可証出字第036號

中國青年出版社印刷廠印刷

新華書店總經售

*

787×1092 1/32 2 1/2 印張 43,000 字

1956年12月北京第1版 1956年12月北京第1次印刷
印數1—30,000

統一書號：13009·102

定價(8)二角六分

內 容 提 要

数学家華罗庚先生在一篇文章里說到：“在近二三年來，我收到成百封关于研究用圓規和直尺三分任意角的信件，……这問題戕害了不少青年，因为这是已經解決了的‘不可能’問題，搞这問題的青年大部都是成績优异的青年，但他們把寶貴的时光花在这毫無出路的研究工作上。”这本书就是为了帮助这一些青年而寫的。作者用現在中学数学課本里講到的一些知識，比較系統地闡明了一些几何作圖不可能問題。先从几个方面說明所謂几何作圖不可能問題是指在什么样的条件下面說的，再進一步說明为什么这些問題是作圖不可能問題，同时也介紹一些解这些問題的方法。不但能解开讀者关于这些問題的一切疑团，而且能帮助讀者樹立正确的学习态度，引起讀者進一步研究数学的兴趣。

写在前面

目前，还有一些人在研究用直尺和圆规三等分一任意角的问题。他们听人家说这是一个几何作图不可能问题，看看问题却又这么简单，就偏不相信它不可能，於是廢寢忘食，刻苦鑽研。他们肯鑽研的精神是好的，可是在这个问题上鑽研，却是浪费精力。因为对于这个問題，从前的人已經做过不少的研究，有了肯定的結論，所以这已經是早已解决的问题，不成問題的問題，用不到我們再去研究了。

为了帮助爱好几何的青年对一些几何作图不可能问题有一个初步的認識，从而不再把宝贵的时间浪费在这些已經不成問題的問題上，我編写了这一本小册子。

关于这个问题的書籍和文章，原已經有过一些。但是我覺得这些書籍和文章，有的講得比較簡單，有的講得比較高深，对一般具有中学数学水平的讀者來說，不是都能看懂的。因此我参考了这些材料，用現在中学数学課本里講到的一些知識，来比較系統地闡明这些問題。我先从几个方面說明所謂几何作图不可能問題是指在什么样的条件下面說的，再进一步說明为什么这些問題是作图不可能問題，同时也介紹了一些解这些問題的方法。由於不引用高等数学，有的地方或許論証不够严密，但是通过一些具体而淺显的例子，用比較、

分析、綜合的方法得出結論来，我認為还是有說服力的。

通过对这些問題的探討，我想讀者不但能够解开关於这些問題的一切疑团，而且还能够体会到数学上理論和实践結合的重要性，明确代数和几何的内在联系。假如讀者能因此树立正确的學習态度，發生进一步研究数学的兴趣，那更是作者覺得十分欣慰的了。

由於作者水平的限制，書里可能有缺点和錯誤，希望讀者批評指正。

錢 曾 濤

1956 年 5 月

目 次

一	惊奇的回答	
	时鐘也会三等分一角。.....	7
二	問題說錯了!	
	用几种特制的器械可以三等分一角。.....	10
三	还是有可能	
	有刻度的直尺可以很順利地解决这个問題。.....	15
四	“規”“矩”的規矩	
	欧氏几何的作圖工具和它們的使用法。.....	19
五	兩個“为什么?”	
	几何作圖为什么要限定用直尺和圓規? 为什么限定用 直尺和圓規就不可能三等分一角?	23
六	“代数”“几何”併了家	
	笛卡兒坐标的引进, 平面上的点和实数組的“一对一的 对应”关系。.....	27
七	圖形变方程	
	笛卡兒坐标上的直線方程和圓的方程。.....	30
八	問題的关键	
	只有由已知的長度用有限多次有理运算和开平方所得到 的長度, 才能用直尺和圓規作出。.....	37
九	完全是兩回事	
	作圖問題的“無解”和“不可能”的區別。.....	42

-
- 一〇 怎样来动手作?
代数的几何作图法.45
- 一一 “不为”和“不能”
限定用直尺和圆规所以不可能三等分一角的道理.51
- 一二 跳出了圈子
应用别的曲线来三等分一角, 尼哥米德蚌线, 帕斯卡蚶线.60
- 一三 从一个神话谈起
倍立方体问题.65
- 一四 算它最困难
圆积求方问题.71
- 一五 一些错误的想法
别再把宝贵的时间浪费在这些已经是不成问题的问题上.77

一 惊奇的回答

时钟也会三等分一角。

我知道你曾經學習过几何，或者現在正在學習几何，而且學習得很好。你不是很喜欢解决几何里的作圖問題嗎？的确，爱好几何的人，对作圖問題往往感到特別有兴趣。我想，你一定会知道一个看来很簡單却又那么困难的作圖問題，就是“把一个任意角三等分”。你也許同許多人一样，尝过它的味道，譬如說，把已給的角 AOB 当做中心角（圖 1），把这角所对的弦 AB 三等分於 C 、 D 兩点，然后連接 OC 、 OD ，再延長交 AB 於 E 、 F ，認為这样 OE 、 OF 就三等分 $\angle AOB$ 了。但你又很快就会發現， $\angle AOE$ 同 $\angle BOF$ 固然是相等的，因为很容易証明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ；而 $\angle EOF$ 却比它們大，理由也很簡單，就是在 $\triangle AOD$ 里， OC 是 AD

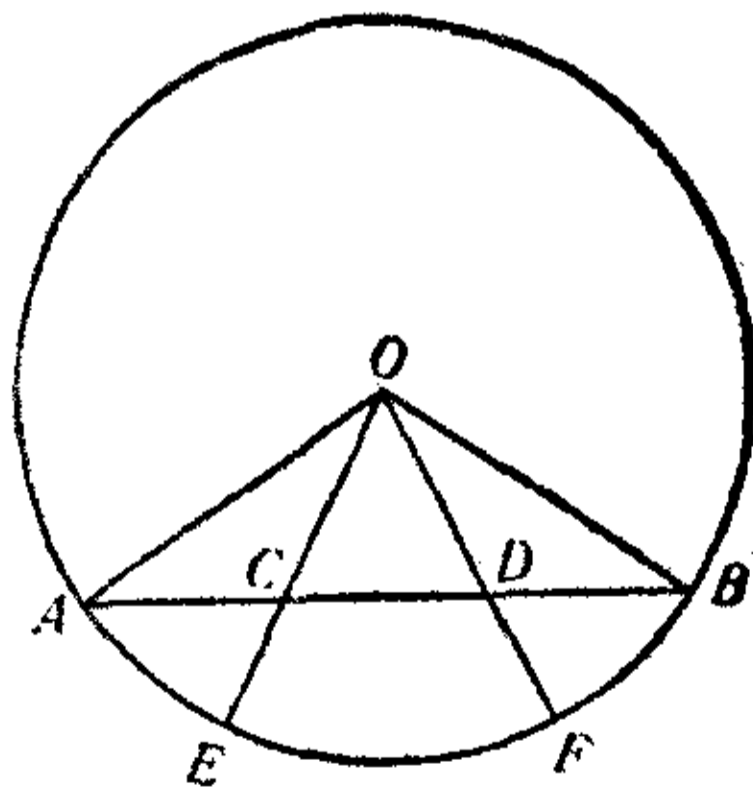


圖 1.

上的中線，又 $OA > OD$ ，所以 $\angle AOC < \angle COD$ ，我們不是已經知道，在三角形里，中線跟小的鄰边所夾的角大於它跟大的

鄰边所夾的角嗎？因此你失敗了！

你是不会甘心於自己的失敗的，你不是請教過老師嗎？而且也曾經閱讀過一些書籍或雜誌，想得到它的解答，但是結果使你很失望，都告訴你這是“不可能作圖問題”，我想，表面上或許你沒有什麼意見，但是內心里還不免會將信將疑的。

假如你問我：“你会不会把一个任意角三等分呢？”

我的回答是：“会，而且很容易！”

这个回答一定会使你很惊奇吧？你一定以为我是一个大言不慚的人了！否則就是把問題听錯了！或許是把這題理解成特殊角的三等分，如直角的三等分，平角的三等分，因此你会很快地提醒我：“要注意是任意角啊！”

我是完全注意到这一点的，請你別性急，我来告訴你怎样作法：

几何里的許多作圖問題，在实际工作当中是往往会遇到的。因此，有些問題不能單純地看做几何作圖，而且也是一种技术，譬如說，我們都知道等分圓周的問題是一个比較有趣的作圖題，这就是把圓周分成 n 等分，其实作一个正 n 边形也就跟把圓周分成 n 等分是一回事。沒有深刻研究几何的人，如画家、無線电設計者、建筑家以及手工艺家，在工作当中也常常会遇到这样的問題，我們祖国的美丽的五星紅旗，不就是要先作正五边形嗎？至於“把一个任意角三等分”，也同样是被建筑家、圖案設計者等广泛地应用着的，他們却很順利地把這個問題解决了。譬如說，只要用量角器先把要分的角量出度数来，然后再算出它的三分之一應該是多少度多少分，这样不是很

快就可以把三等分角作出了嗎？

“不能这样，这是近似的作法，假如测得的度数不能被三所整除呢？”你一定会很不服气地说。

那末，我们就来换一种作法，或许可以满足你的要求。

你大概阅读过苏联别莱利曼所著的“趣味几何学”吧，这是一本很好的课外读物，它会告诉你去注意我们周围世界里各种事物的习见的几何关系，告诉你怎样把学到的几何学知识应用到实际方面去，引起你研究几何学的愿望，养成你研究几何学的嗜好。我现在来介绍这本书里写的一种“三等分角”的方法，一定会使你感到兴趣。

大家知道，时钟面上都有时针分针，分针走一转，时针就走过一个字。也就是分针转动了 360° 的角，时针就走了 360° 的十二分之一，而十二是三的倍数。我们利用时钟的这个特性，就能把任意角三等分了。

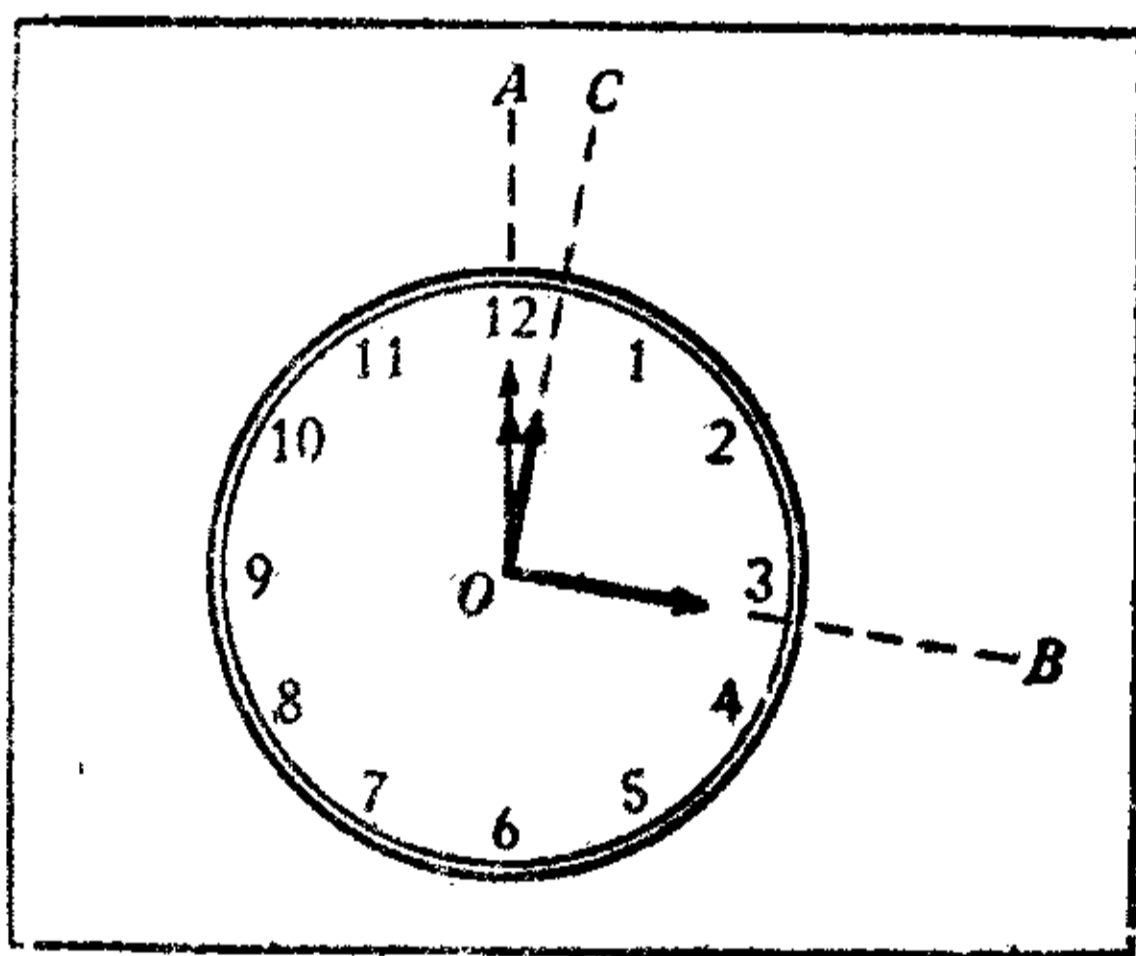


圖 2.

手續很簡單，你把要三等分角的圖形画到一張透明的紙上(圖 2)，当时鐘的时针分针併在一起的时候(为了看起来更清楚，可以撥到正十二时)，把透明紙上的圖样舖到时钟面上，使圖上的角的頂点恰好落在針的軸心上，角的一边跟相併的兩針相合，然后你把分針慢慢地撥到跟角的另一边

相合的位置，时針当然也轉动了一个角，用笔在那透明紙上把时針現在的位置記下来，我們从圖上可以知道，时針所走的角 $\angle AOC$ 一定是 $\angle AOB$ 的十二分之一，因此，再把 $\angle AOC$ 放大到四倍，放大角度的方法，我想你是一定知道的，那末这个角不就是 $\angle AOB$ 的三分之一了嗎？

二 問題說錯了！

用几种特制的器械可以三等分一角。

“这方法真巧妙，居然时鐘也会替我們解决三等分角問題，不过……”

我知道你还不滿意，你認為这还没有解决你所提出的問題，你認為我們應該用几何的方法来把任意一角三等分，上面的方法虽然很巧妙，但畢竟沒有用到几何的知識。

如果你的意思是这样，那我得提醒你，你把問題說錯了。你不老是这样問旁人嗎：“你会不会把一个任意角三等分呢？”照理，只要分出就算数，对不对？

你或許以为我在吹毛求疵了，你会这样說：“那又何必呢？这問題本来就是几何学上的，当然要用几何知識来作出。”

这可不能这样說。我們研究任何一件事物，應該有正确的科学态度，特別是學習数学的时候，对一个問題的提出或研究，要明确已給的条件，根据这些条件要想达到什么样的目的，都要敘述得清清楚楚，不能含糊其辞。假如我这样問你一

个問題：“你会不会做一个五角星呢？”你要解决这問題的方法就多得很，譬如說：依照一个現成的五角星把它描下来；或者用正方形的紙片对折成一个等腰直角三角形，再用斜边的中点做角頂折成相等的五个角，然后用剪刀剪出一个五角星来；或者用一張兩边平行的紙条，挽一个結，把它小心地抽紧，不要讓它的边卷起来，一面抽，一面用手慢慢地压平，就会做成一个五边形，再作出它的各对角線，就画出一个五角星了；或者应用几何課本上黄金分割的作圖法，也可以把它作出来，我們應該說，这些方法都是所提出的問題的解答，不能說这个对那个不对。

好吧，那我們現在就依你說要用几何学的知識，来解三等分一角的問題吧。我想提出几个解法，看看它們是不是符合你的要求。

你总知道一位古代希臘的物理学家又是数学家的阿基米德（公元前 287(?) 年-公元前 212 年）吧。我們不但在物理学上遇到他，在几何学上也遇到他。他还是一个热烈的爱国者，当羅馬人圍攻希臘的叙拉古城的时候，他貢獻出自己所有的科学知識，来領導这个城市的防禦工作。后来这座城市陷落了，虽然羅馬將軍下令不准伤害这位偉大的学者，但是他終於被羅馬兵士杀死了。据說在羅馬兵士闖进他家的时候，他正在沙地上画几何圖形，他恐怕兵士破坏他的圖形，嘴里还連連叫喊“不要动我的圓”呢！

从他的著作里，我們知道这位学者也研究过这个問題。他把所要三等分的角 AOB 的一边 BO 延長（圖 3），再用 O 做

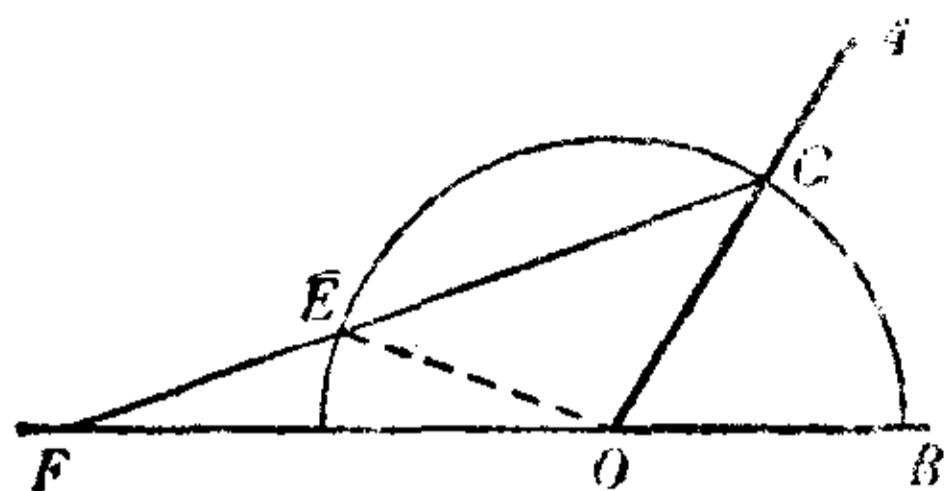


圖 3.

圓心,任意的長 r 做半徑,画一个半圓,跟角的另一边相交於 C . 於是他說,过 C 点用直尺作一直線,使它跟半圓和 BO 的延長線交於 E 、 F 兩点,使

EF 恰巧等於圓的半徑 r . 这可以这样作:我們事先在直尺上記下 E 、 F 兩点,使它們中間的距离等於 r , 然后繞 C 点滑动直尺的位置,使直尺上的 E 、 F 分別落在半圓和 BO 的延長線上. 这是完全可能的. 这样一来,我們就得到 $\angle F = \frac{1}{3} \angle AOB$.

因为

$$EF = EO = OC,$$

所以

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle OCE + \angle F = \angle OEC + \angle F \\ &= \angle F + \angle EOF + \angle F = 3\angle F. \end{aligned}$$

为了作这个圖方便起見,我們还可以設計一种器械(圖 4): 拿兩根有槽的棒(木头或金屬制的都可以),在 F 点那兒把它們連接在一起,並且使它們能够繞 F 点轉动. 再拿兩根一样長的棒,一端連接,像圖

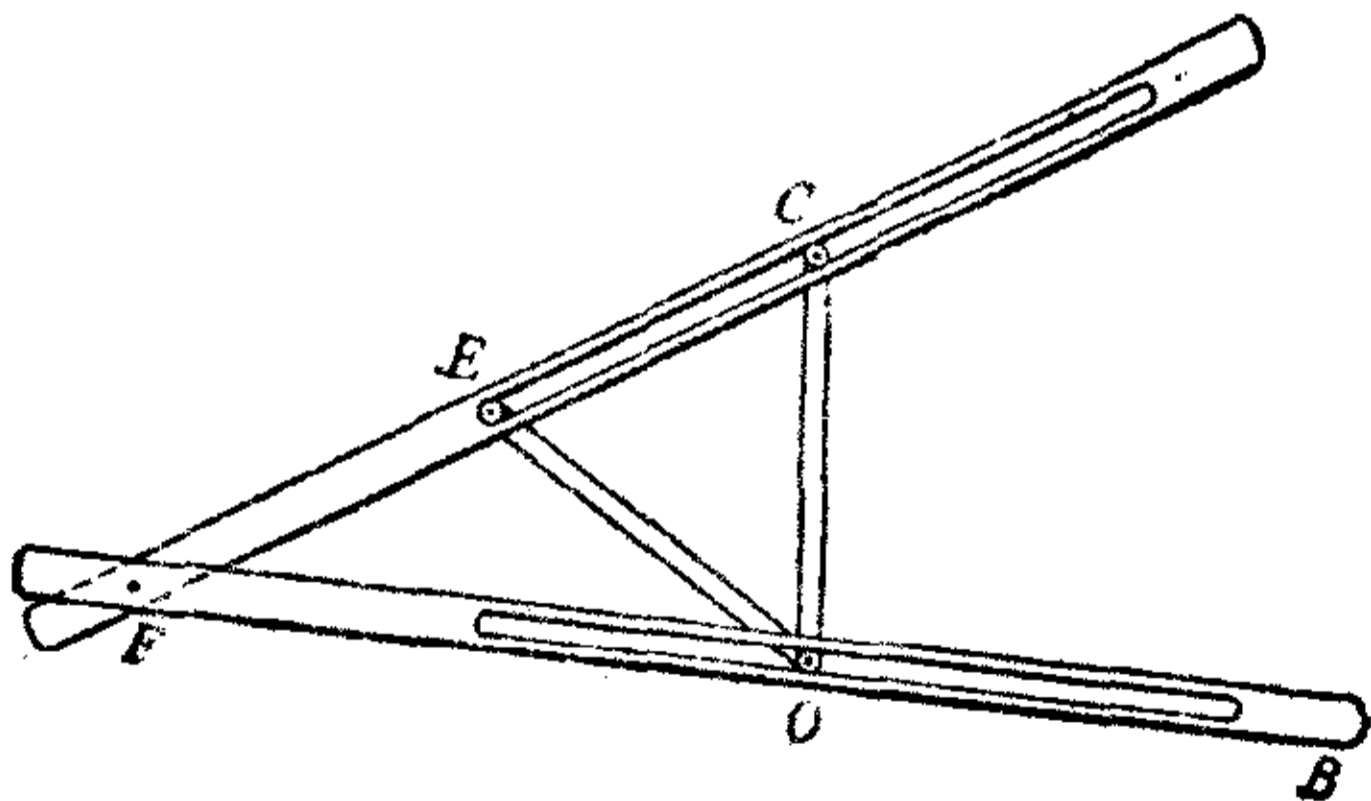


圖 4.

上那样嵌在槽里,把 E 端的位置固定下来,使 EF 的長等於 EO , C 点和 O 点却可以隨 F 角的張大或縮小自由地在槽里滑动. 这样,我們只要自由調節 $\angle COB$ 使同我們要分的角一

样大，那末 $\angle F$ 就是所要分的角的三分之一。

这种器械有人就叫它做“三分角器”。

“想不到这个问题有这样悠久的历史，在二千多年前就有人注意它了，倒真有意思。但是为了三等分一角，还要另外制作一个器械，这就未免太麻烦了！”你可能会有这样的感觉。

是的，这真是一个古老的几何作图题。谁都知道，古代希腊是一个研究学术风气很盛的国家，有过不少的哲学家和数学家，如柏拉图、亚理斯多德、德谟克利图、托勒玫、芝诺等，就是我们几何学的老祖宗欧几里得，也是这个时代的人。这个看来似乎很简便的作图问题，古代数学家也的确为它绞过脑汁，还为此热烈地争辩过，而且因而发现了数学上一些别的问题。

至于上面所说的三分角器，倒并不是一定要你去制出来，这不过是说明这个问题的一种解法罢了，你在实际工作当中真正遇到这个问题的时候，我前面已经说过，用量角器也可以把它近似地解决了。其实也不一定只有上面这样的一种三分角器，我现在再另外来介绍一种：

用一张硬纸板或马口铁片，剪成像图 5 上有阴影部分的形状，跟半圆相接的一段 AB ，长度和半圆的半径相等，另一段 BD 要跟 AC 垂直，并且在 B 点跟半圆相切， BD 可以稍

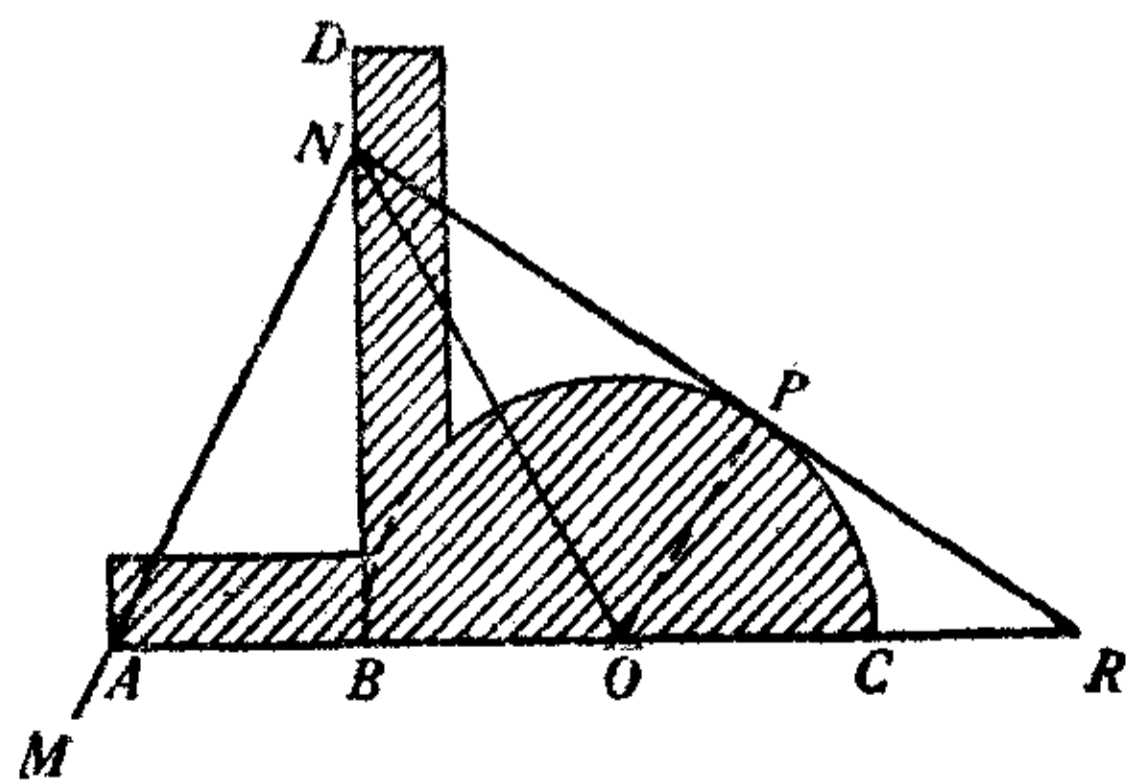


圖 5.

許長一些，有了这个，我們便能进行三等分角了。

假定我們要把一个 $\angle MNR$ 分成三等分，先把 $\angle MNR$ 的角頂 N 放在 BD 線上面，逐步移动 N 在 BD 線上的位置，使 $\angle MNR$ 的一边通过 A 点，另一边却跟半圓相切。然后从 N 到 B 、从 N 到 O 作兩条直線 NB 和 NO ，於是这个角就被三等分了，因为我們很容易証明：

$$\begin{aligned}\text{直角三角形 } \triangle NBV &\cong \text{直角三角形 } \triangle OBV \\ &\cong \text{直角三角形 } \triangle OPV.\end{aligned}$$

所以 $\angle ANB = \angle ONB = \angle ONP$ ，

所以 $\angle ANB = \frac{1}{3} \angle MNR$ 。

有人把这塊板叫做“三分角板”，用三分角板比用上面那种三分角器簡單。

或許你認為这个方法虽然比上面的簡單，但畢竟还要特制一个工具，还是麻煩。

那我还可以介紹你应用現成的工具来解这个问题的方法。

你总該有一副三角板吧，學習几何的人是少不了它的，一塊是等腰直角三角形的，一塊是兩個銳角分別是 30° 、 60° 的。通常一副三角板，第一塊的斜边恰巧等於第二塊的長直角边。利用这一副三角板，我們也可以来三等分一角。

如圖 6， $\angle AOB$ 是所要分的角，作它的一边 OB 的平行線 XY ， OB 和 XY 中間的距离是任意長 l ，於是就用一副三角板，使兩個直角頂相合於 C ，一塊的長直角边跟另一塊的直角边相重合如 CG ，另一組直角边相接而成直線 HK ，在 CH 、

CK 上取 CD 、 CE 使各等於 l ，把这样拼湊的兩塊三角板放到 $\angle AOB$ 上，小心移动它們的位置，使 CG 通过 O 点，而 D 和 E 分別落在 OA 和 XY 兩条線上，那末 OC 和 OE 就是所求的三等分線了，因為我們很容易証得：

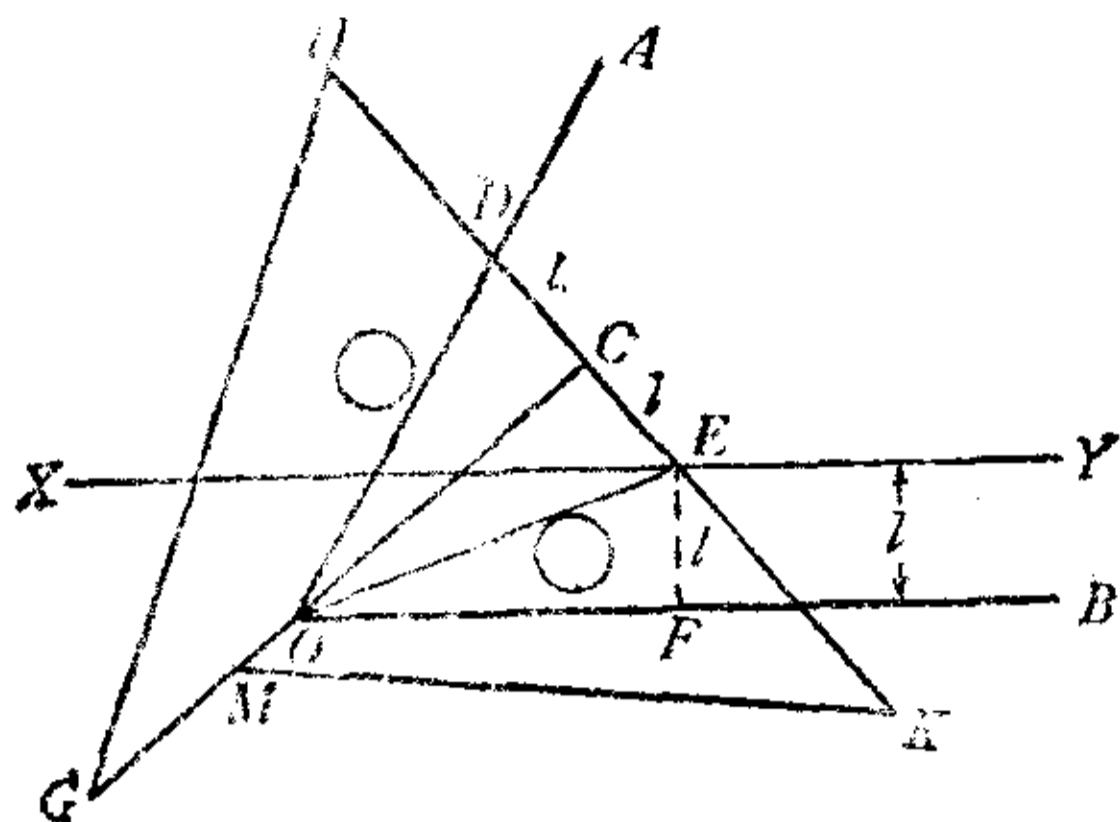


图 6.

直角三角形 $DCO \cong$ 直角三角形 ECO
 \cong 直角三角形 EFO .

所以 $\angle DOC = \angle EOC = \angle EOF$.

假如你把木工使用的角尺依照上面的方法来做，也可以得到同样的結果。

你看上面的几种三等分角的方法怎样？它們都是根据几何圖形的性質，应用一些工具把这个問題解决的。

三 还是有可能

有刻度的直尺可以很順利地解決這個問題，

你說：“我從來沒有想到怎樣用一些工具來解這個問題，我也練習過許多作圖問題，有些問題在表面上確實比這問題要複雜得多，但有時我也把它解決了。幾何學上有許多作

圖方法，如奠定基礎法，平行移動法，利用對稱的方法，軌跡交截的方法，相似作圖法以及代數解析法等等。雖然老師告訴我們，要解決一個作圖問題，不能機械地搬用一些什麼方法，但是我總是根據一些幾何學上的基本作圖定理和一些幾何圖形的性質，沒有用什麼特別的工具，只用直尺和圓規把它作出來的，因此，我覺得上面所說的幾種方法總似乎不符合幾何學上作圖的規矩。”

規矩！這兩個字倒引起我想到了我國古代戰國時候的一位學者孟軻來了，他曾經說過：“不以規矩，不能成方圓。”所謂“規”“矩”其實就是用來作圖的兩種工具。“矩”就是用來作方形的角尺；“規”就是用來畫圓形的圓規。據說從前在山東嘉祥縣，曾經發掘出一所漢朝武梁祠的石室，里面有一幅石雕的人面蛇身像，題名“伏羲氏手執矩，女媧氏手執規”，這雖然是神話，但也可以說明“規”“矩”在很古的時候就被用來做畫圖的工具了。你所說的要符合幾何學上的作圖規矩，不就是用“規”“矩”來作圖嗎？

“正是這個意思，”你會回答我說。你還向我說明：“我們學習幾何作圖的時候，就老是只應用直尺和圓規，如把兩點連成一線段，把一線段延長，或是作一直線的平行線或垂直線，或是用圓規畫一段弧或一個圓，這樣，經過一些不同的手續，就把要作的圖形作出了，結果再用一些幾何定理來證明它的作法是準確的。”

這樣說來，問題又推進一步了。就是說：不許用什麼特制的工具，而要用直尺和圓規把一個任意角三等分。那我們就

繼續來研究吧！

只用直尺和圓規，要三等分一角还是有可能！

有人曾經採用过这样的方法：如圖 7. $\angle AOB$ 是一个所要分的角。用角頂 O 做圓心，在角的一边 OA 上取一任意長的線段 OR 做半徑，画一个圓，再

延長 AO 跟圓相交於 C 点，然后用 C 做定点，用直尺和剛才画圓的圓規合併移动，使过 C 点作出这样的—一个線段，它跟圓和 OB 線分別交於 D 、 E 兩

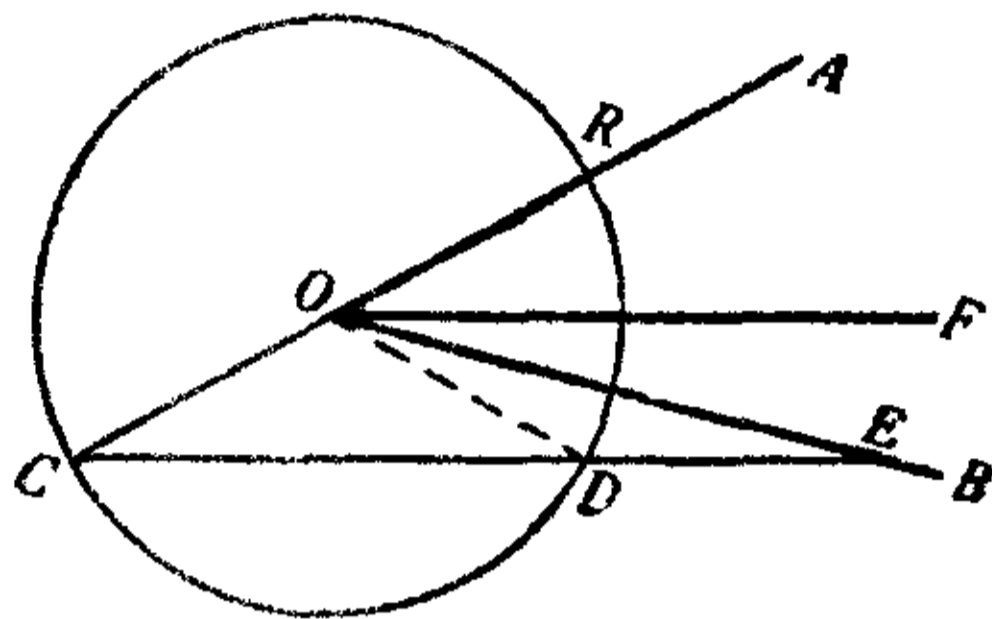


圖 7.

点，而 DE 恰巧等於圓的半徑的長，就是使圓規的兩脚恰巧能落在 D 、 E 兩点上，再作 $OF \parallel CE$ ，那末 OF 就是 $\angle AOB$ 里的一条三等分線了。因为，假如連 OD ，

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle C + \angle OEC = \angle ODC + \angle OEC \\ &= \angle DOE + \angle OED + \angle OEC = 3\angle OEC = 3\angle EOF.\end{aligned}$$

所以
$$\angle FOB = \frac{1}{3}\angle AOB.$$

更有趣的，有人还只用一根直尺，就能把一个任意角三等分，不过他在直尺上事先刻上兩個点，這兩個点間的距离是可以由作圖的人任意选取的，当然，既选定之后，那末在作圖的过程当中就不能再变更了。我們平常所用的直尺不是有現成的刻度嗎？那就更好，你只要在心里任意認定一段長度就好了，这个長度我們就叫它做單位長。只要用这样一根直尺，就能很順利地来把一个任意角三等分了。

如圖 8, $\angle AOB$ 是所要分的角，先在 $\angle AOB$ 的一边 OA

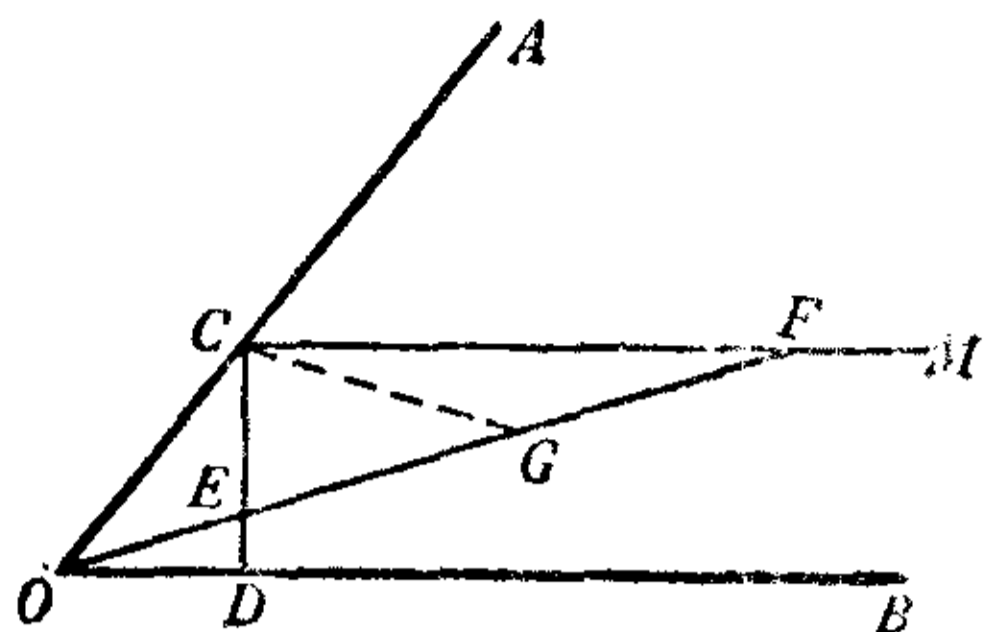


圖 8.

上截取一段 OC ，使它等於單位長的一半，再从 C 点作 $CM \parallel OB$ ，作 $CD \perp OB$ ，然后再过 O 点作一条直線 OF 分別截 CD 和 CM 於 E 、 F 兩点，使 EF 等於單位長。有

上面所說的直尺，这种作法

是完全可能的，只要把直尺繞 O 点旋轉，同时留意直尺上那段單位長度兩端的刻度，讓它們分別落在 CD 、 CM 兩線上就是了。再連 C 和 EF 的中点 G ，我們就很容易証明 OF 就是 $\angle AOB$ 的一条三等分線，因为在直角三角形 ECF 里，

$$CG = \frac{1}{2}EF,$$

而

$$OC = \frac{1}{2}EF,$$

所以

$$OC = CG = FG,$$

$$\angle FOB = \angle CFO = \angle FCG = \frac{1}{2}\angle CGO = \frac{1}{2}\angle COG.$$

也就是

$$\angle FOB = \frac{1}{3}\angle AOB.$$

这两个証明或許会使你想起，你在几何課里曾經做过这样的两个練習，課本上是把圖形画好的，只是根据圖形敘述了有哪些条件，要求能証出 $\angle FOB = \frac{1}{3}\angle AOB$ ，而你也就沒有去考虑这两个圖形是怎样作出的，只是照書本上依样画葫蘆地画了下来。現在經過我一提起，你一定恍然大悟，原来这些問題就跟三等分一任意角的作圖有很大的关系。

你把這兩種方法仔細推敲一下，可能還看得出來：上面說的第一種方法，其實同阿基米德的方法差不多。你只要把圖 7 上的 BO 延長，再把圖轉 180° ，那上半部就跟圖 3 完全一樣。而且，上面所說的圖 7、圖 8 兩種方法，也是基本上相同的，圖 7 上的 $OCDE$ 部分就跟圖 8 上的 $COGF$ 部分一樣。如果在第一種方法里，不用直尺和圓規合併移動，而是在直尺上刻 D 、 E 兩點，使 DE 等於半徑 OR 的長，那就可以用這直尺作出 UDE 這條線。再說在第二種方法里，如果把圓規張開到兩腳間距離等於半徑 OC 的兩倍，然後再跟直尺合併使用，也可以作出 OEF 這條線，使 $EF = 2OC$ 。

所以，只用直尺和圓規，把它合併使用，或者就只要一根有刻度的直尺，也可以解決這個三等分一角的問題。

四 “規”“矩”的規矩

歐氏幾何的作圖工具和它們的使用法。

“我真像丈二和尚摸不着頭腦了！想不到這樣一個問題，解決的方法有這許多，時鐘幫助我們解決了這個問題，用特制的工具也解決了這個問題，現在，直尺和圓規甚至連一根有刻度的直尺也都能滿意地把一個任意角三等分了，但是我們却都說這是一個不可能作圖問題，這到底是怎麼一回事呢？”你會提出來問我。

那請你慢慢地聽我講吧！我想先提出一個常識性的問題

来談談，假如我問你：“人类会不会在空中飞行呢？”那你大概会回答：“这是不可能的，人又没有翅膀，怎能在空中飞行呢？”但你經過思索之后，可能又这样說了：“現今科学不断地向前發展，人利用气球、飞艇、飞机、火箭等工具，也可以說已經能在空中飞行了。而且苏联現在还正在研究人造衛星呢！”不錯，你这兩個回答就說明了一点：我們判断一个問題的可能不可能解决，應該先考虑在什么条件之下，因为，有些問題在某种条件下完全可以解决，而在另一种条件下，就不可能解决。像人类飞行的問題，要不使用任何工具，人类是無法在空中飞行的，但是使用了各种工具，人类就能在空中自由飞行了。現在我們所研究的三等分角的問題，也正是这样的。如果不受几何作圖工具和作圖方法的限制，是可以解决的，而且很容易，但是如果只限於应用直尺和圓規，要想来把它作出，那是不可能的。

“剛才不是已經用直尺和圓規把它作出了嗎？”你一定覺得奇怪。

是的，我正要告訴你，上面所用直尺和圓規的作圖方法，还是不合几何学上的作圖規矩的。我們不是談到規矩嗎？“規”“矩”兩個字單獨來講，可以說是几何学上作圖所使用的工具，但是把“規矩”兩個字連在一起講，也就是所規定的使用工具的方法。你真想不到吧，居然“規”“矩”還有“規矩”呢！

几何学上告訴我們，直尺和圓規是欧几里得几何作圖的特定工具，並且規定了它們使用的方法是這樣：直尺有兩種用法，就是（1）兩點之間可以連結成一個線段，（2）線段可以向

兩方任意地延長。圓規的用法是用任意一點做中心，用任意長的半徑可以畫一段弧或一個圓。

我相信你是知道這一點的，但是還得注意一些“規矩”，就是我們幾何學上所用的直尺是沒有刻度的，並且不能把直尺和圓規同時在一起合併使用。我們有了這個限制，前面所說的兩種方法就顯然不符合幾何作圖的規矩了。為了進一步說明這一點，我想用幾何課本上一個常見的作圖題做例子來談一談：

過圓外的一已知點，作圓的割線，使圓里面的線段等於已知長。

當然已知線段的長應該小於或等於圓的直徑。

現在讓我來說出它的作法：

如圖 9，把直尺繞圓外的已知點 P 轉動，同時把圓規的兩腳間距離張到跟已知長 a 一樣，然後把圓規緊靠着直尺，並且隨直尺同時移動，使一脚始終落在圓周上，直到另一腳也落在圓周上為止，於是停止移動直尺，沿直尺畫下直線，就是所求的割線。

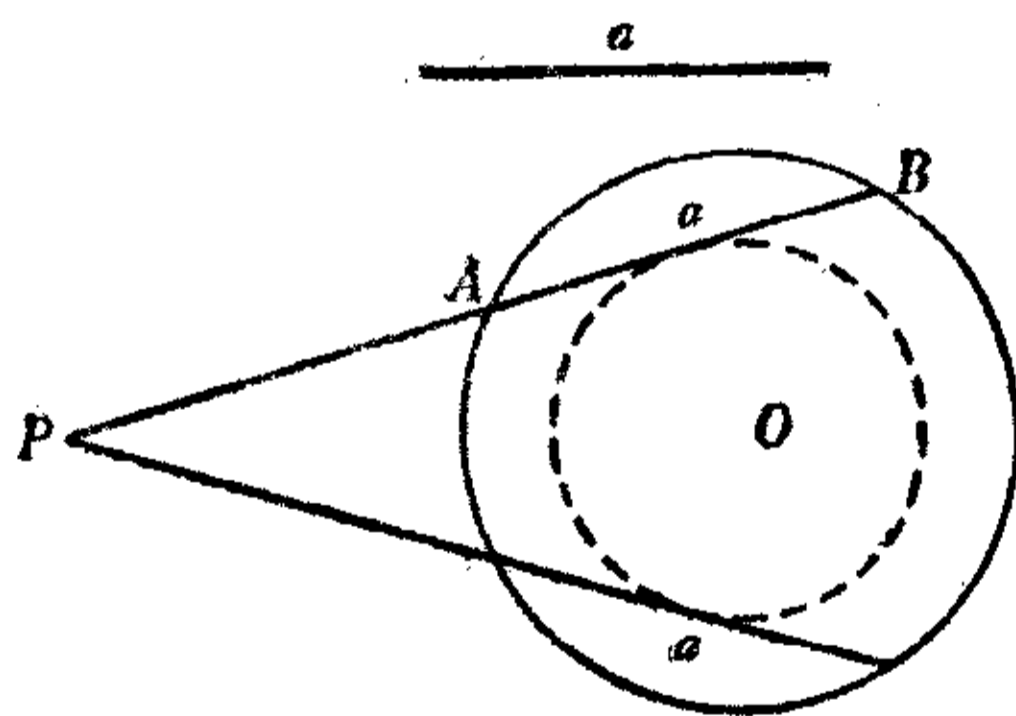


圖 9.

你一定會笑着說：“這種作圖方法怎麼行呢？假如真有人這樣作圖，一定會受到老師批評的。我認為正確的作法應該是這樣：在圓里面任作一弦使等於已知長，然後用圓心到這弦的距離做半徑，作已知圓的同心圓，再從 P 點引這同心圓的

兩切線，那末這兩線就是所求的割線了。”

你說的完全正确，通过这个比較普通而又簡單的作圖題，我們應該更理解上面說的使用規矩的規矩了。其次，我還要告訴你另外一個規矩，在幾何作圖的時候，直尺和圓規是不能使用無限多次的。

你覺得這個規矩好像沒有必要吧？你說：“假如一個作圖問題，需要使用無限多次的圓規直尺才能得到解決的話，那末我們一輩子也沒有辦法實現這個作圖，而且我想也決不會有這樣的作圖問題。”

這倒也不能這樣說。你要知道如果沒有這一個限制，假如真的允許我們使用無限多次直尺和圓規的話，那末三等分角的問題雖不能實現作圖，在理論上却是完全可以解決的。在數學上有一些問題，根據已給條件，只要在理論上能夠解決，也就算它已經解決了。

現在我們不妨來看一看，假如直尺和圓規可以使用無限多次，三等分角的問題應該怎樣來解決。

你總該知道用直尺圓規可以把一個任意角二等分吧，這是一個基本作圖問題，用這個方法我們就很容易把一個已知角四等分、八等分、十六等分…… 2^n 等分（ n 是正整數）。

你再想一想代數上告訴我們的無窮遞降等比級數的求和公式：初項是 a ，公比是 q 的時候，和

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

根據上面的一些知識，我們可以着手三等分一角了。假

如 $\angle AOB$ 是所給的角，那末作法就是這樣：先把 $\angle AOB$ 二等分，在 $\frac{1}{2}\angle AOB$ 上減去 $\frac{1}{4}\angle AOB$ ，再加上 $\frac{1}{8}\angle AOB$ ，再減去 $\frac{1}{16}\angle AOB$ ，再加上 $\frac{1}{32}\angle AOB$ ，照這樣的規律逐步作下去，所得出的角就越來越趨近所給角的三分之一，如果繼續作到無限多次，那末也就能得出 $\frac{1}{3}\angle AOB$ 了，因為，

$$\begin{aligned} & \angle AOB \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \cdots \right) \\ &= \angle AOB \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{3} \angle AOB. \end{aligned}$$

現在我們該小結一下了：根據上面所談的，知道假如不受作圖方法的任何限制，我們完全可能解決三等分角這一個問題，而且解決的方法多得很：或者用特制的工具；或者用有刻度的直尺；或者改變幾何上使用直尺和圓規的方法；以後我們還會知道在數學上有更多的方法解決這個問題。至於只限於用直尺和圓規而且使用方法上又加上了幾點限制，那要三等分一角才是不可能的事。

五 兩個“為什麼？”

幾何作圖為什麼要限定用直尺和圓規？為什麼限定用直尺和圓規就不可能三等分一角？

“為什麼幾何作圖的工具一定要限定用直尺和圓規呢？又

为什么限定用直尺和圆规就不可能三等分一角呢？”

我估计到你必然会提出这两个问题的，因为爱好学习的人往往对问题希望能够彻底地理解。但是这两个问题是没法一下子就回答出来的。

我们先来谈一谈第一个问题吧。

要说明这一点，得说一下几何学的历史。

我們都知道，几何学跟其他科学一样，是由於人类生产上的实际需要而产生的，只要哪里有人类文化在成长，哪里就会产生几何学。人类在长期的生产斗争过程当中，在渔猎、耕地、测量、观察天体等工作当中，经过亿万次的经验，得来了关于图形的概念，也逐渐认识了图形的性质，这些知识就是几何学的萌芽。许多书上都这样说：在古代的埃及，由於尼罗河每年的定期泛滥，冲坏了田地的界线，在泛滥以后，需要把田地重新划分，这样，就需要测量地面上的某些距离和面积，於是就产生了几何学。其实这样的认识是片面的，我們知道古老的國家如印度、巴比倫，也很早就有不少的几何学知识，而我們的祖国，對於几何学的研究也有几千年历史，並且有很多的偉大成就。在黑陶文化时期（公元前 1000 年），陶器的花紋就有菱形、正方形和圆内接正方形等几何图案。在墨翟（公元前 480 年—公元前 390 年）所著的書里，就提到了圆的定义和几何学方面的許多别的知识。在古代算書“九章算术”里，載有計算各种形状的土地面积和物体体积的方法。在另一本古代算書“周髀算經”里，已經講到關於直角三角形各边間的关系的勾股弦定理。又如我国南北朝时候的数学家祖冲之，曾經

求得圓周率 π 在 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 之間，用 $\frac{355}{113}$ 做 π 的近似值在數學史上也是有重大意義的。

應該指出：古代的一些幾何知識是零碎的，片斷的，不全面的。直到公元前 330 年—公元前 275 年 (?)，希臘有一位偉大的數學家歐幾里得，特別詳細地研究了這一門科學，並且插進了自己研究的一些材料，把它系統化起來，寫了一本書，叫做“幾何原本”。這本書對於幾何學的發展和幾何學的教学，都起了很大的作用，直到現在，人們還根據它來編寫幾何學的課本。我們現在在中學里所學習的幾何學，內容和二千多年前歐幾里得所建立起來的幾何學，基本上沒有什麼不同。所以這種幾何學也叫做歐幾里得幾何學，或者叫歐氏幾何學。

人類為了研究圖形的性質，勢必要把圖形先畫出來。既要作圖，就需要作圖的工具。古時候人們所能利用的工具是哪些呢？我們也能想像到的，他們一定觀察到直線圖形里最簡單的是“線段”，曲線圖形里最簡單的是“圓”，很自然地他們就想去找出能畫線段和圓的工具。根據他們生活的體驗，用一根比較平直的木條，就能在沙地上畫出一條線段，用一條樹樅枝就能畫一個比較好的圓。木條和樅枝是隨處都找得到的，這種自然工具使用起來既方便又省事。發展到後來，人們也會用天然的比較平直的木條加工成直尺，並且會做出像樹樅枝那樣而又可以調節張開程度大小的工具——圓規——來。所以在歐幾里得幾何學里也就把這兩種工具——直尺和圓規——當做幾何作圖的特定工具，並且根據它們作圖實現的過程，又規定了它們的用法，這就是歐幾里得所說的“公法”。

我想你一定又会这样問了：“科学不断地向前發展，当然几何学也不例外，到了目前，我們画圖形的工具就多啦！有三角板，有精确刻度的直尺，有丁字尺，可以画出很小或很大的圓的精密的圓規，量角器，对角線尺，比例規和曲線板等，要画垂線、平行線、角的平分線或者縮放一些圖形，利用这些工具真是易如反掌，又为什么要拘泥於欧氏几何里限定用直尺和圓規两种工具的作法呢？这不是墨守成規嗎？”

其实，要解决这个疑問，只要明确認識一下我們學習几何的目的就行了。學習几何的目的，主要可以分兩方面来講：一方面通过几何知識的學習，使我們能利用这些知識来解决实际問題，使理論跟实践紧密地結合起来。關於这点，我不想多談。另一方面，就是通过圖形的观察，培养自己对空間的想像力，又通过圖形性質的研究，培养自己的邏輯思維力。但是要想达到这个要求，那就必須讓我們有充分的思考机会。現在在工具的使用上加上限制，要我們憑着有限的工具去解决几何上的一些問題，無疑会使我們不得不多动腦筋。就在这种劳动的过程当中，可以培养我們精細的邏輯思維力，和丰富的想像力。法国有一位数学家拉普拉斯說：“几何如强弓”，虽然他沒有指出几何在实践上的作用，但是在發展智慧和邏輯思維这方面，這句話可以說是很恰当的。因此，在几何作圖方面，現在还像过去一样限定用直尺和圓規，是有它的一定意义的。

也許你还要問：“工程制圖为什么可以尽量利用便利的工具呢？”这一个问题很容易回答，因为工程制圖的目的是为了

制出圖来做施工时候的根据,能够方便地制出所需要的圖来,就能提高工作效率,因此制圖的工具可以不受什么限制.目的不同,当然要求也不同了!假如有人認為在几何学上用直尺和圓規沒有办法来三等分一角,在实际工作当中遇到需要解决这样問題的时候,也硬說沒有办法,那就未免失之拘泥了!

难怪平时老师叫大家解几何題的时候,不止一次地告訴大家要多动腦筋,多独立思考,不要有依賴思想,不要因失敗而灰心,道理就在这里.

其实,不但我們學習几何学是这样,學習別的科目也應該是这样.不过几何学似乎更有訓練我們思考的作用.現在,我們得进一步回答你所提出的第二个問題了,就是为什么限定用直尺和圓規就不可能三等分一角呢?要說明它的道理,倒使我为难了,因为这是一个理論比較深邃的問題,但是尽管这样,我还想尽我的力量把這個問題深入淺出地談一談.

六 “代数”“几何”併了家

笛卡兒坐标的引进. 平面上的点和实数組的

“一对一的对应”关系.

有人說:“我对學習几何特別感到兴趣,但是对代数却覺得乏味.”也有人說:“代数在实际工作上比几何应用广,我們應該好好學習代数.”

这些說法都是錯誤的. 固然,代数跟几何所研究的对象

是有区别的，但是它们毕竟都是数学的分科，事实上是紧密联系着的。因此，假如把这两门科目机械地分割或者偏废哪一面，那对你学习数学一定会带来不小的障碍。譬如说，几何学上的有公度和无公度线段的理论，就是同代数学上有理数和無理数的概念相联系的。在我们下面研究用直尺和圆规为什么不能三等分角的时候，你对这点或许会有更大的体会。

以前我不是说过，用直尺和圆规来三等分角的问题已经有悠久的历史吗？远在公元前四五百年，大约在我国周朝的时候，希腊的一些哲学家和数学家就开始研究这个问题。大概为了这个问题在表面上很简单，而在作图的时候又有极大困难的缘故，引起了数学家们的特别重视，还曾经有过不少的辩论，从而发现了别的几何图形的一些性质，然而问题本身始终没有获得解决。直到公元 1637 年，大约在我国明朝末年，法国一位大数学家笛卡儿发现了新的处理几何图形的方法，对这个二千多年来的古老的作图问题，总算开始找到了眉目。

笛卡儿究竟用什么样的新方法来处理几何图形的性质呢？说来你是完全知道的，在代数学里，我们不是曾经学习过一次和二次函数的图象吗？在平面上取两条互相垂直的直线，叫做坐标轴，水平的一条叫横轴，竖直的一条叫纵轴，它们的交点 O 叫做坐标原点，横轴和纵轴把平面分成四部分，叫做四个象限。于是平面上任一点的位置都可以用它跟坐标轴的垂直距离来决定，跟纵轴的垂直距离叫横坐标，常用 x 来代表，跟横轴的垂直距离叫纵坐标，常用 y 来代表。这种坐标方法因为是笛卡儿首先提出的，所以又叫“笛卡儿坐标”。

我給你一個簡單的函數式，要你在坐標上描出它的圖象來，這你或許是非常熟悉的。你在描出函數圖象的過程當中，不是先要求得許多組 x, y 的值嗎？有了一組 x, y 的值，在坐標上就可以描出一個位置確定的點來。從描點的經驗知道，一組 x, y 的值一定能描出一點，而且只能描出一點，反過來一點一定有一組坐標，也只能有一組坐標。這些 x, y 的值，我們可以取有理數，也可以取無理數，有理數和無理數都叫做實數，因此，我們把這些一組一組的 x, y 的值叫做實數組。這樣，用了笛卡兒坐標，我們可以得到一個結論：

對於平面上任一點 P ，必有一實數組 x, y 跟它對應，也只有一實數組 x, y 跟它對應。不同的兩點 P_1 和 P_2 各跟不同的實數組 x_1, y_1 和 x_2, y_2 對應。反過來說也是成立的：對於任一實數組 x, y ，在坐標的平面上必有一點 P 跟它對應，而且也只有一點 P 跟它對應。不同的兩實數組 x_1, y_1 和 x_2, y_2 各跟不同的兩點 P_1 和 P_2 對應。

上面這個結論也可以簡單地說：幾何學里的平面上的點，可以用代數學里的實數組 x, y 來表示，反過來，代數學里的實數組 x, y ，也可以用幾何學里平面上的點來表示。

這樣一來，代數學里含有兩變數 x, y 的方程，如 $y = kx + b$, $y = ax^2$ 等，就可以根據上面的理論在坐標上畫出直線或者是拋物線等的幾何圖形了。

利用坐標來畫出代數學里函數式的幾何圖形的方法，在今天許多實際工作當中廣泛地應用着，幾乎成了工程技術人員的常識。但是最初提出這種方法確實是一件艱難的工作。

在笛卡兒以前，許多數學家認為代數學里所研究的“數”跟幾何學里所研究的“形”完全是兩回事，到了笛卡兒才發現“數”和“形”的不可分割的內在聯系，用了這種方法，研究變數就比較容易了。恩格斯非常推崇笛卡兒，他說：“笛卡兒的變數是數學中的轉折點，因此運動和辯證法便進入了數學”^①，這就足夠說明這個發現的意義的偉大了，從此，代數跟幾何就併了家，打破了過去存在着的鴻溝，一切幾何問題都可以化成代數問題，然後用代數的運算推出幾何的結論，據說笛卡兒提出坐標的目的之一，也是為了解決古代幾何學里一些無法解決的問題。

七 圖形變方程

笛卡兒坐標上的直線方程和圓的方程。

你聽到這裡，或許已經等得不耐煩了，你說：“關於函數的圖象，代數上面也學習過不少，如一次函數、二次函數、指數函數、對數函數等，都可以利用坐標來描述它們運動變化的規律，但是用了坐標，又怎麼能解決我們的三等分角問題呢？”

可惜我還不能一下子就回答這個問題，前面我所說的，還只說明了“代數”跟“幾何”的聯系，至於怎樣來解決我們的三等分角問題，還需要更多的知識，不過現在我們已經有條件

① 自然辯證法，1955年人民出版社譯本，217頁。

進一步研究：在歐氏幾何里限定用直尺和圓規來作圖，直尺和圓規的作圖本領究竟有多大呢？

你覺得我這句話有些奇怪吧？你會說：“這不是早就知道了嗎？兩點間可以用直尺連結成一個線段，還可以用它把線段向兩方任意地延長；已知圓心和半徑，可以用圓規作出一個圓或一段弧。”

是的，不過我們只知道用直尺可以作直線、用圓規可以作圓還不夠，我們還得進一步研究，應用直尺和圓規究竟可以画出哪些圖形來。譬如說，我們已經知道用它可以作出正方形、五角星等。要判斷這一點，單憑直尺和圓規的使用方法和一些簡單的作圖定理，是不夠的。假如我們能把直尺和圓規所作出的直線和圓翻譯成代數上的問題，然後由代數運算得出結論，那就比較明确了。

那我們現在就來做翻譯工作吧！

我們已經知道用了笛卡兒坐標以後，平面上一個已知點的位置可以用一組實數來表示。坐標法的應用當然不限於研究有關個別點的位置問題，從這個基本概念出發，我們就能夠進一步想出用代數的方法去研究比較複雜的幾何圖形——線。我們首先從最簡單的線就是直線研究起，直線就是直尺所能作出的圖形。

如果已知一直線所經過的兩個點，那末，這條直線在平面上的位置就已經完全決定了，因為，經過兩點只有唯一的直線。我們取這兩個已知點 P_1 和 P_2 放在坐標平面上面，那末它們的坐標就可以取一定的數值，現在用 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$

来表示这两个点(括号里的 x_1, y_1 等表示点的坐标). 我们知道直线可以看做是由连续运动着的点形成的, 它的运动规律是

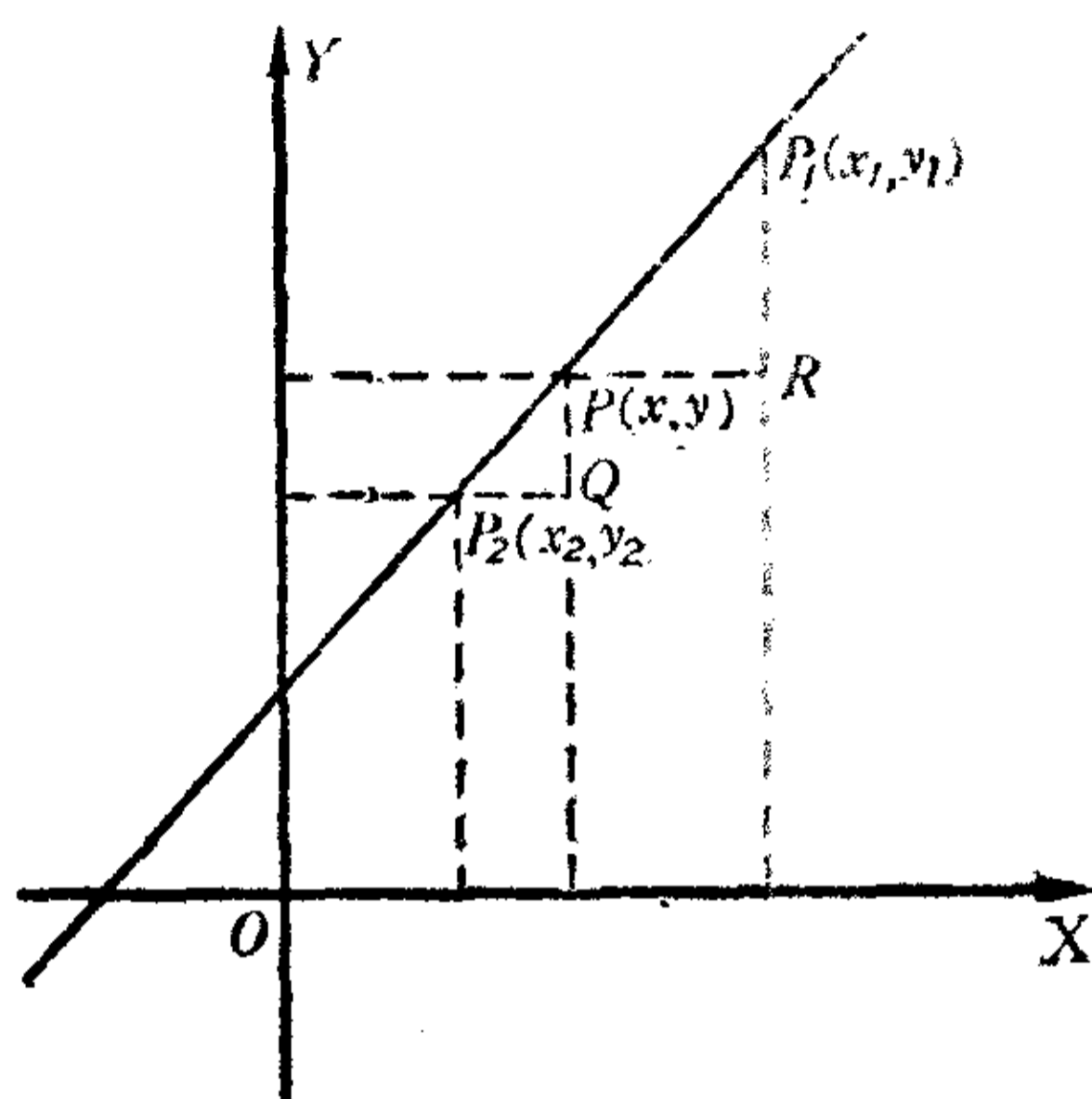


圖 10.

方向不变. 当一点运动的时候, 它的坐标一定随着变动, 我们习惯上把这个动点记作 $P(x, y)$, 它的坐标 x, y 随着 P 点依照方向不变的运动规律而变化.

如图 10, 根据点的运动方向不变的规律, 显然可以得到这样的关系:

$$\angle P_1PR = \angle PP_2Q.$$

从这里我们显然可以找出两个已知点 P_1 和 P_2 的坐标跟动点 P 的坐标的关系, 因为 $\angle P_1PR$ 和 $\angle PP_2Q$ 既然相等, 它们的正切函数也应该相等:

$$\operatorname{tg} \angle P_1PR = \operatorname{tg} \angle PP_2Q.$$

从圖 10 看出,

$$\operatorname{tg} \angle P_1PR = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \quad \operatorname{tg} \angle PP_2Q = \frac{y - y_2}{x - x_2},$$

所以

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y - y_2}{x - x_2}.$$

化简这个方程:

$$(y_1 - y)(x - x_2) = (y - y_2)(x_1 - x),$$

$$y_1x - xy - x_2y_1 + x_2y = x_1y - x_1y_2 - xy + y_2x$$

$$\text{就是 } (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

我们设:

$$y_1 - y_2 = A, \quad x_2 - x_1 = B, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = C,$$

那末上面的式子就變成了一般的二元一次方程：

$$Ax + By + C = 0.$$

這就是一条直線的方程，不論直線在坐標平面上的位置怎麼樣，都可以用這個方程來表示，不過當直線在某些特殊的情況下， A 、 B 、 C 三個數當中可能有等於 0 的：

(1) 假如 $A=0$ ，也就是 $y_1 - y_2 = 0$ ， $y_1 = y_2$ 。直線平行於橫軸，方程是 $By + C = 0$ 或 $y = -\frac{C}{B}$ 。

(2) 假如 $B=0$ ，也就是 $x_2 - x_1 = 0$ ， $x_1 = x_2$ 。直線平行於縱軸，方程是 $Ax + C = 0$ 或 $x = -\frac{C}{A}$ 。

(3) 假如 $C=0$ ，也就是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ ，或 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ ，或 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ ，說明縱坐標同橫坐標成正比，也就是直線通過原點，方程是 $Ax + By = 0$ ，原點 $(0,0)$ 是適合這個方程的。

(4) 假如 $A=0, C=0$ ，那末方程是 $By = 0$ ，也就是 $y = 0$ ，既要平行於橫軸，又要通過原點，當然就是橫軸本身了。

(5) 假如 $B=0, C=0$ ，那末方程是 $Ax = 0$ ，也就是 $x = 0$ ，既要平行於縱軸，又要通過原點，當然就是縱軸本身了。

現在我們可以得出結論：在平面上任取一條直線，一定可以找到一個二元一次方程像 $Ax + By + C = 0$ 的形式 (A 、 B 、 C 都是實數， A 和 B 不能同時等於 0)，使得直線上任一點 P 的坐標 x 、 y 都適合這個方程。

並且，根據我們上面說的點和實數組對應的可逆關係：任取一個二元一次方程，必能而且只能在平面上找到一條直線，使得用適合這個方程的實數組做坐標所描出的點，都在這條

直線上。

現在我們再來看用圓規所能作出的圖形——圓。

圓也可以看做是由連續運動着的點形成的，它的運動規律是跟一個已知點保持一定的距離，其實圓規的畫圓方法就體現了這個運動的過程，那末圓在坐標上的方程又是怎樣呢？要研究這個問題，我們還得做一個預備工作，就是在坐標平面上怎樣算出已知兩點中間的距離。

如圖 11，假如在平面上任取兩點 P 和 Q ，分別設它們的坐標是 x_1, y_1 和 x_2, y_2 ，並且用 d 表示它們中間的距離。

從圖上可以看出，在直角三角形 PQR 里，

$$QR = x_1 - x_2, \quad RP = y_1 - y_2.$$

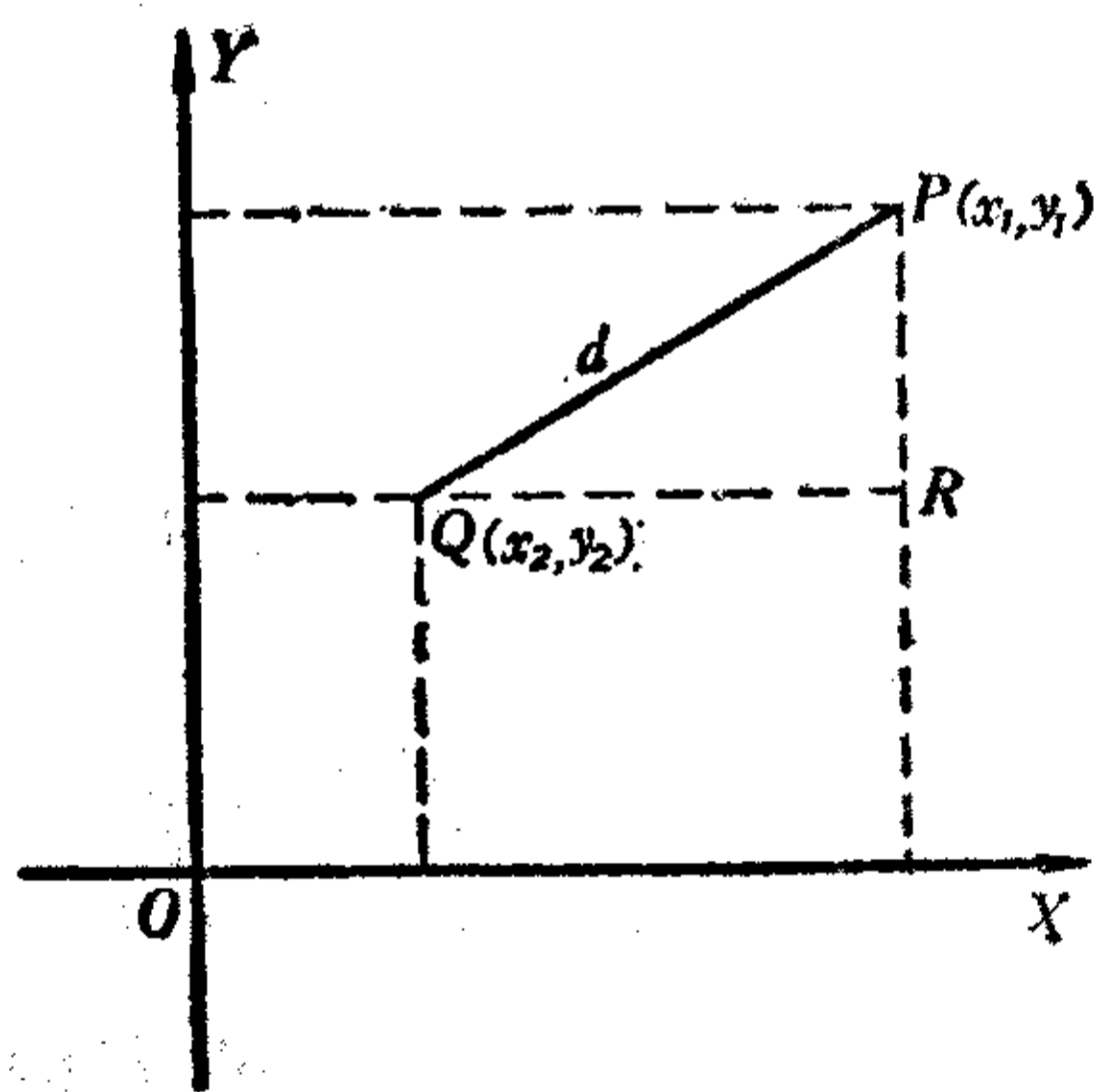


圖 11.

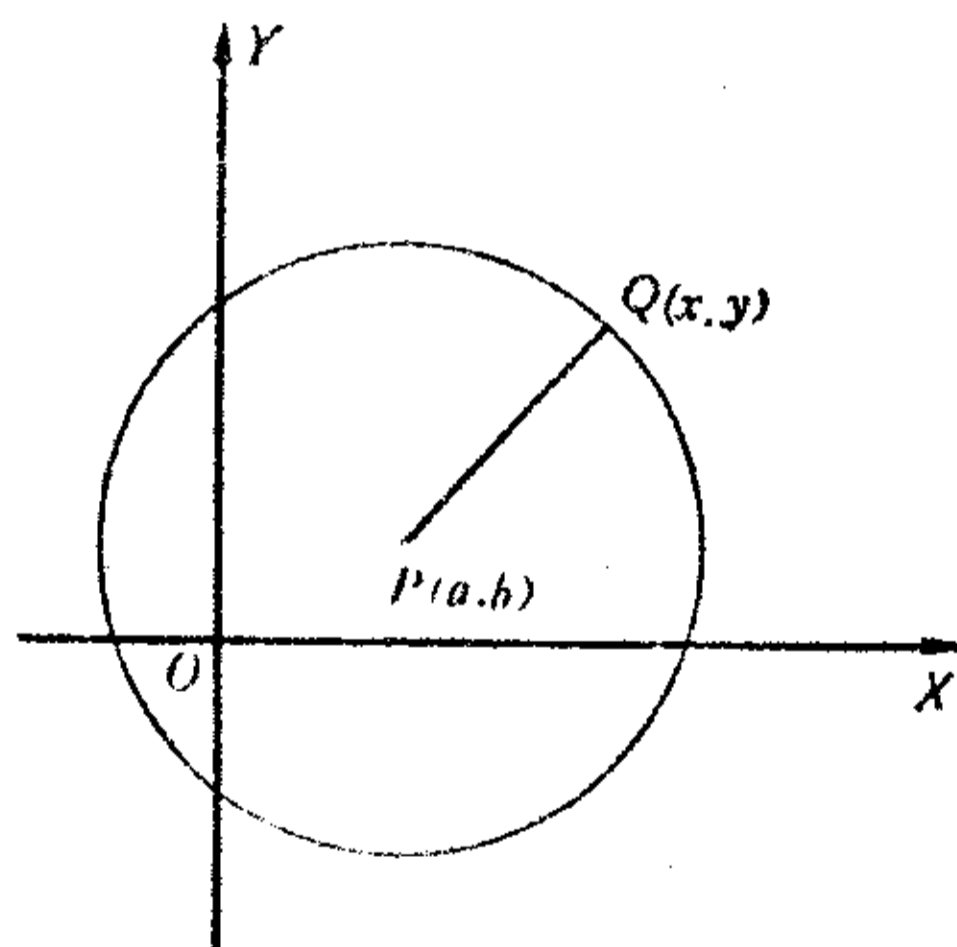


圖 12.

而由勾股弦定理，

$$PQ^2 = QR^2 + RP^2,$$

可知

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

這便是求兩點 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ 的距離的公式。

有了它，我們就可以研究圓的方程了。

如圖 12，假如在平面上任取一點 P 做圓心，用 r 做半徑畫一個圓，設圓心的坐標是 a, b ，圓既然是依照跟一個已知點（就是圓心）保持一定距離（就等於半徑）的規律運動的點形成的，就設這個動點是 Q ，它的坐標是 x, y ，根據兩點間距離的公式，可以找出已知點 P 跟動點 Q 的坐標之間的關係：

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

反過來說用適合這個方程的任何一個實數組 x, y 做坐標所描得的點 Q ，跟 P 點的距離既然都是 r ，所以 Q 一定在用 P 做圓心、 r 做半徑的圓上。

這個方程又可以化成：

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2,$$

或

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

我們設

$$-2a = D, \quad -2b = E, \quad a^2 + b^2 - r^2 = F,$$

那末方程就變成

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

這就是圓的一般方程。顯然這是一個含 x, y 兩個變數的二次方程，所以圓是屬於二次曲線的。為了更清楚地認識圓的方程的特點，我們寫出含有兩個變數的完全二次方程：

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

把這個方程跟圓的方程比較，我們就可以看出圓的方程有這樣兩個特點：

(1) x^2 和 y^2 的係數相同，

(2) 不含 xy 的項。

应该指出:当 $A=C$, 而 $A \neq 1$ 的时候, 方程是不是仍表示圆呢? 回答是肯定的, 这只要用系数 A 去除方程的各项, 就很容易看出了.

现在, 我们又可以得出结论: 在平面上任意画一个圆, 一定可以找到这样一个二元二次方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 使得圆上任一点 Q 的坐标 x, y 都适合这个方程. 并且反过来也成立: 任取这样一个二次方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 必能而且只能在平面上找到一个圆, 使得用适合这个方程的实数组做坐标所描出的点, 都在这个圆上.

我想你大概以前没有想到过吧, 当你在学习几何的时候, 一定经常用直尺和圆规作几何图形, 其实在你作图的时候, 就好像在写下了许多的直线方程和圆的方程; 而当你学习代数的时候, 一定经常在写方程 $Ax + By + C = 0$ 和 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 其实在你写这些方程的时候, 也好像在画下了许多条直线和许多个圆弧. 所以根据上面的讨论, 我们可以把欧几里得几何学里直尺和圆规的作图法翻译成代数学的语言, 就像下面的一个表:

几 何 学	代 数 学
1. 两点之间可以連結成直线. (已知两点 P_1 和 P_2 , 可以作直线 l .)	1. 已知两个实数组 x_1, y_1 和 x_2, y_2 , 可以得到一个二元一次方程 $Ax + By + C = 0$, 使 $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$. ($A = y_1 - y_2$, $B = x_2 - x_1$, $C = x_1y_2 - x_2y_1$.)

2. 線段可以向兩方任意地延長.	2. 就是不限制 x 和 y 的變化範圍.
3. 用任一點做中心,任意長做半徑,可以畫圓弧. (已知圓心 P 和半徑 r , 可以作一圓或弧.)	3. 已知一個實數組 a, b 和一個常數 r , 可以得到一個二元二次方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 或 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. ($D = -2a, E = -2b,$ $F = a^2 + b^2 - r^2$.)

現在,原來是幾何上的圖形——直線和圓,却換了一個面目,變成了代數上的方程——二元一次方程和二元二次方程了. 研究二元一次方程和二元二次方程,就有可能明確地回答我們,直尺和圓規的作圖本領究竟有多大.

八 問題的關鍵

只有由已知的長度用有限多次有理運算和開平方所得到的長度,才能用直尺和圓規作出.

幾何里的作圖題,你大概也練習過很多了,如作三角形、四邊形、切圓等. 在解這些問題的過程當中,你可以看出,無論作什麼樣的圖,我們總是要定出幾個點,然後利用這些點作出所要作的圖形. 如作三角形要定出三個頂點,作四邊形要定出四個頂點,作切圓要定出圓心和切點,或者就最基本的作直線或圓來說,也要定出兩點(對於圓來說,就是半徑的兩

个端点)，因此，我們可以这样理解，几何作圖里的主要关键，就是要定出所求圖形里的一些点的位置。那末我們是怎样作出这些点来的呢？当然只有用直尺和圓規，用直尺和圓規又怎样来确定点呢？我們說有三种情况：用直尺作兩条直線得出交点来；用直尺作直線、用圓規作圓得出交点来；用圓規作兩個圓得出交点来，在后兩種情况，往往不作出整个的圓而是一段弧，因为目的既然在於确定点的位置，只要作出这个圓跟直線或另一个圓（弧）相交的部分就够了。

为了更清楚地說明这一点，我們可以举几个具体的作圖題例子。例如已知一个三角形的兩角一夾边，求作这个三角形：我們先作好已知边，再在边的兩端分別作已知角，这样就把这个問題解出了。其实在这里我們是在利用已知角的兩边相交求出这个三角形的第三个顶点。再如已知一个矩形的一边和一条对角線，求作这个矩形：我們先作好已知边，在边的一端作一条垂線，再用边的另一端做圓心，用对角線長做半徑作弧，弧和那条垂線相交的点，就是矩形的第三个顶点，这里是应用直線和圓弧相交求出来的。有了三个顶点，就可以作另外兩条边完成这个矩形。这里是在应用兩条直線相交求出第四个顶点。再如最簡單的一个作圖題，求作一線段的垂直平分線：这里就是应用在線段兩端作圓弧的方法，求出兩弧的兩個交点，通过這兩個交点作直線，就是所求的垂直平分線。

其实不限於这些例題，不管什么作圖題，假如你把它的作法仔細分析，实际上都是这样的。

特别是有一种叫做“軌跡交截法”的作圖法，在这种方法

里可以更清楚地看到我們所說的情況：作圖的關鍵實際上是在求交點，所以在这里我們假如復習一下這個方法的原理，倒是很有意思的。所謂軌跡交截法，就是：

如果所提出的作圖題的解決可以歸結到決定適合於若干已知條件的某一點的位置，那末，我們可以先放棄這些條件當中的一個，這樣就有無數的點可以適合於其餘的已知條件，這些點便形成一個軌跡，如果可能的話，我們就可以作出這個軌跡來。

其次，把我們所放棄的條件加進來而放棄另一個已知的條件，再來考慮，這時候仍然會有無數的點可以適合於現在的已知條件，這些點又形成一個軌跡。如果可能的話，我們又可以作出這個軌跡來。

因為所求的點必須適合於題里已知的一切條件，所以它一定同時在這兩個軌跡上，也就必定是這兩個軌跡的交點。

有時候兩個軌跡當中的一個是題里已經給出的，那我們只要作一個軌跡就可以了。

在初等幾何里所研究的軌跡，只是直線、線段、圓、弧，這些軌跡不都是直尺和圓規能作出的嗎？因此，我們可以說初等幾何里解一切的作圖題，都是在用軌跡交截法。只是除了我們特別提出說是用軌跡交截法的一些作圖題以外，其餘的雖然也在用軌跡交截法，看起來却不十分明顯罷了。

那末軌跡交截法在代數學里相對應的是什麼呢？那就是求聯立方程組的解。

我們已經知道利用直尺和圓規確定點的位置，可以有三

种情形:第一种是两条直线的交点,第二种是一条直线跟一个圆的交点,第三种是两个圆的交点.译成代数学的话,根据图形和方程的对应关系,便是求三个联立方程组的解:

第一种情况:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

第二种情况:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

第三种情况:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0.$$

显然,代数里解这些联立方程组的工作相当於几何里軌跡交截法求交点的工作.

至於怎样来求出这些联立方程组的解,我想你一定很熟练. 第一个联立方程组的两个根是 $x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$, $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$; 解第二个联立方程组,可以把二元一次方程写成一个变数是另一个变数的函数式,如 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 把它代入二次方程里,得出只含有一个未知数的二次方程,設是 $ax^2 + bx + c = 0$, 然后应用 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 算出 x 的值,再由它求出 y 的值. 第三个联立方程组里,我們看出把两个二元二次方程相减,就得出一个二元一次方程,把这个二元一次方程跟一个二元二次方程联立,解法就跟第二种情况一样.

仔細觀察上面三個聯立方程組所求出的根，便知道第一組方程的根可以由方程各項係數用加減乘除的運算得出，第二第三兩組聯立方程的根可以由方程各項的係數用加減乘除和開平方的運算得出。同時，在上面的三個聯立方程組里，所有係數 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A, B, C, D, E, F, D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2$ 等，依照我們前面所討論的把幾何里直線和圓譯成代數方程的道理，又知道它們完全可以由已知點 P_1, P_2, P, Q, \dots 的坐標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (a, b), \dots$ 等用加減乘除的運算得出的，由此，所有這些由直線和圓弧相交所得出的新的點的坐標（就是聯立方程組的根），都可以由已知點的坐標用加減乘除和開平方的運算得出。於是我們得到下面重要的結論：

由已知點經過歐氏幾何的作圖法所能得到的新的點的坐標，都可以由已知點的坐標用有限多次的加減乘除和開平方的運算得出來，反過來，如果一點的坐標不能由已知點的坐標用有限多次的加減乘除和開平方的運算得出，便不能由已知點用歐氏作圖法作出。

一點的坐標其實是兩個長度，所以又可以這樣說：由已知的長度經過歐氏幾何的作圖法所能得到的新長度都可以由已知的長度用有限多次的加減乘除和開平方的運算得出，反過來，如果一個長度不能由已知的長度用有限多次的加減乘除和開平方的運算得出，便不能由已知的長度用歐氏幾何作圖法作出。

上面的結論，就說明了直尺和圓規作圖的本領究竟有多大。

九 完全是兩回事

作圖問題的“無解”和“不可能”的區別。

你說代數課里听老师講过，二元一次联立方程組的解在几何上的說明是这样的：如果联立方程組里各系数有 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ 的关系，那末這兩条直線就平行，沒有交点，也就是說，找不到它們的公根，这种方程叫矛盾方程；如果 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ，那末這兩条直線重合成一条，也就是說，可以找到無數組适合它們的公根，这种方程叫相依方程。於是你問我：“用代數来分析几何作圖的时候，遇到了像第一种情形的話，是不是就不可能作圖了呢？”

这一点你提得真有意思，也正是我准备要談的，用直尺和圓規来求出所要作的圖形上的一些新的点，有时候不像我們所想的那样如意。兩条直線在平面上有相交、平行、重合三种情况，直線跟圓也有相交、相切、相离三种情况，圓跟圓有相交、相切、相离、重合四种情况。这些情况，我們都可以从联立方程組里的系数关系上判別出来，關於兩条直線的位置关系，就像你所說的，而直線跟圓、圓跟圓的位置关系，也可以由最后所得出的 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 式里的判別式 $b^2 - 4ac$ 看出来。

我們可以把它們的对应关系作成表解：

几 何 学	代 数 学
<p>兩直線的位置关系</p> $\begin{cases} 1. \text{ 相交(一公共点),} \\ 2. \text{ 平行(無公共点),} \\ 3. \text{ 重合(無数公共点).} \end{cases}$	$\begin{cases} 1. \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ (一解),} \\ 2. \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ (無解),} \\ 3. \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ (無数解).} \end{cases}$ <p>在 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 里</p>
<p>一直線跟一圓的位置关系</p> $\begin{cases} 1. \text{ 相交(兩公共点),} \\ 2. \text{ 相切(一公共点),} \\ 3. \text{ 相离(無公共点).} \end{cases}$	$\begin{cases} 1. b^2 - 4ac > 0 \text{ (兩解),} \\ 2. b^2 - 4ac = 0 \text{ (四解相同),} \\ 3. b^2 - 4ac < 0 \text{ (無解)*.} \end{cases}$ <p>在 $\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$ 里</p>
<p>兩圓的位置关系</p> $\begin{cases} 1. \text{ 相交(兩公共点),} \\ 2. \text{ 相切(一公共点),} \\ 3. \text{ 相离(無公共点),} \\ 4. \text{ 重合(無数公共点).} \end{cases}$	$\begin{cases} 1. b^2 - 4ac > 0 \text{ (兩解),} \\ 2. b^2 - 4ac = 0 \text{ (兩解相同),} \\ 3. b^2 - 4ac < 0 \text{ (無解),} \\ 4. \frac{D_1}{D_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2} = 1 \text{ (無数組解).} \end{cases}$ <p>在 $\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases}$ 里</p>

* $b^2 - 4ac < 0$, 得出的是虛根, 在实数坐标系上沒有意义.

剛才你問我，假如在作圖的過程當中，遇到了兩條直線不能相交得出新的點的時候，是不是就不可能作圖了，現在看來，除了兩條直線不能相交的情況之外，還有直線跟圓和圓跟圓的不相交，但是我應該着重指出一點，就是你所說的“不可能”三個字用在這裡是錯誤的。為什麼會有得不出交點的情形呢？根據上面的表解，知道全是由於系數的關係，系數又是從哪裡來的呢？前面談過，它們是由已知條件的長度得來的，因此，由已知條件長度給出的不同，有時候可以很順利地作出圖形，有時候就無法作出這個圖形，有時候還可以作出無數個圖形，這些都不過是作圖當中的一些特殊情形，但是作圖本身一般說來，還是可能的。在我們幾何作圖上，有時候因了所設條件的情形特殊，解答的個數可以多到無數，我們叫它做“不定解”；也可以沒有解答，我們叫它做“無解”；也可以有一個或幾個解答，我們叫它做“有解”。這些都是作圖可能問題當中的各種情況。對於一個作圖問題的這些情況，我們通常要在作出圖以後，加以討論，像作圖題無解的情形是常會遇到的。

至於作圖“不可能”問題，跟“無解”却完全是兩回事。所謂作圖不可能問題，只是指用直尺和圓規不能把這個圖作出來，如果用旁的辦法，那我們還是可以作出這個圖來的。所以這個作圖題的解答實際上是存在的，不像無解的作圖題，它的解答是不存在的。譬如過圓內一點作圓的切線便是無解的作圖題。除此以外，我們也可能遇到一些作圖題，它給出的條件不足，因此解答可以多到無數，譬如已知兩邊，作一三角形；反轉來，作圖題給出的條件太多，事實上無法辦到，譬如過已知線

外一点，求作这线的垂直平分线，这种问题本身就是“不合理”的，所以它又决不能同作图题的“无解”和“不可能”混为一谈。

一〇 怎样来动手作？

代数式的几何作图法。

既然我们已经得出了结论：只有由已知的长度用有限多次加、减、乘、除和开平方的运算所得到的长度，才能用直尺和圆规作图，那末究竟怎样来动手作呢？这是一个非常现实的问题。几何问题通过代数的分析，只是使我们了解问题的性质，具体的实践当然还要几何本身来解决。

现在我们就从某些简单式子所表示的线段的作图谈起。

如果 a, b, c, \dots 都是已知线段，那末下面的式子所表示的未知线段 x 都可以用直尺和圆规作出来。

$$(1) x = a + b + c,$$

$$(2) x = a - b (a > b),$$

$$(3) x = 2a, 5a, \dots$$

$$(4) x = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{2a}{5}, \dots$$

$$(5) x = \frac{ab}{c} \quad (\text{这表示 } x \text{ 是 } c, a, b \text{ 的第四比例项，因此，}$$

线段 x 可以用作 c, a, b 的第四比例项的方法求得)，

$$(6) x = \sqrt{ab} \quad (\text{这表示 } x \text{ 是 } a \text{ 和 } b \text{ 的比例中项，因此，线段 } x \text{ 可以用作 } a \text{ 和 } b \text{ 的比例中项的方法求得})，$$

(7) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (这表示 x 等於直角边是 a 和 b 的直角三角形的斜边),

(8) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$) (这表示 x 等於斜边是 a 、一条直角边是 b 的直角三角形的另一条直角边),

上面的一些方法,也体现了用直尺和圆规可以作出由已知长度用加減乘除和开平方的运算所得出的新的长度这一定理.应用这些方法,我们还可以解一些比较复杂的求作线段的问题.

例如,已知 a, b, c, d, m, n, p , 求作 $x = \frac{abcd}{mnp}$.

这问题虽然就它们的分子分母分别来看,是没有几何意义的,而对于全体来说,还是可以作的.

先写成 $x = \frac{ab}{m} \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{d}{p}$ 的形式,再设 $y = \frac{ab}{m}$, $z = \frac{yc}{n}$,

所以 $x = \frac{zd}{p}$.

未知数 y 是 m, a, b 的第四比例项, z 是 n, y, c 的第四比例项, x 又是 p, z, d 的第四比例项.为了简化作图手续,我们还可以把它连续作出:

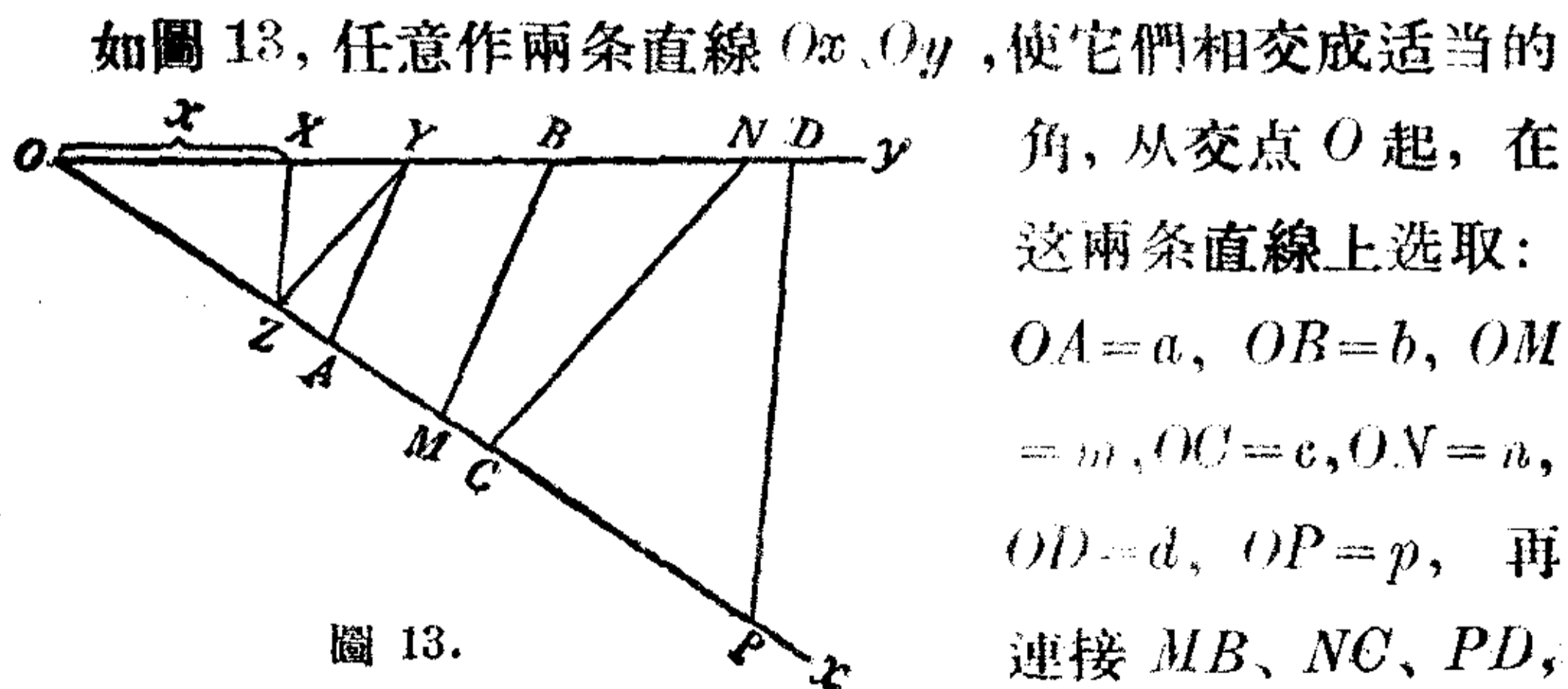


圖 13.

从 A 作 MB 的平行线 AY , 从 Y 作 NC 的平行线 YZ , 再从 Z 作 PD 的平行线 ZX , 那末 OX 就是所求的线段了.

因为, 根据平行线间的比例关系, 我们有,

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OB}{OY}, \text{ 或 } \frac{m}{a} = \frac{b}{y}, \text{ 所以 } y = \frac{ab}{m};$$

$$\frac{ON}{OY} = \frac{OC}{OZ}, \text{ 或 } \frac{n}{y} = \frac{c}{z}, \text{ 所以 } z = \frac{yc}{n};$$

$$\frac{OP}{OZ} = \frac{OD}{OX}, \text{ 或 } \frac{p}{z} = \frac{d}{x}, \text{ 所以 } x = \frac{zd}{p}.$$

又如, 已知 a, b, c , 求作 $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

我們可以設 $a^2 + b^2 = y^2$, 这时候 y 就等於直角边是 a 和 b 的直角三角形的斜边, 因此 y 可以作出. 作出 y 以后, 就得 $x = \sqrt{y^2 - c^2}$, 因而, x 就等於斜边是 y 、一条直角边是 c 的直角三角形的另一条直角边.

进一步我們可以举一些例, 說明怎样从具体的作圖問題列出代数式来作圖. 我想先提一提所謂“黄金分割法”的問題, 就是把已知線段分做兩部分, 使一部分是全線段和另一部分的比例中項. 这个古老的作圖題你一定很熟悉, 因为它有許多有趣的性質吸引着你. 不过我在这里不准备多談, 只是向你建議, 再把这个作圖題复習一下是有好处的, 但是應該着重理解它的分析过程和作圖依据, 这样, 你对怎样用代数的分析来解决具体的作圖題这一点, 或許能有更大的体会.

現在, 我想另外提出一个問題, 怎样用几何作圖法来画出五角星. 你一定会很快地这样回答:

“还是应用黄金分割法作出，因为圆内接正十边形的一边等於把圆的半径分成中外比而得到的比较大的部分，这样我们可以先把圆十等分，再顺次連結每隔一个的分点，就得到圆内接正五边形。作出这正五边形的所有对角线，这些对角线所组成的图形就是五角星。”

假如我进一步再问：能不能直接分圆成五等分呢？这个问题或许对你来说是生疏的，但是借助於代数，还是可以很顺利地解决的。

为了演算简便起见，设已知圆的半径 $r=1$ (就是单位圆)，我们先用代数方法求出它的内接正五边形的一边的长，

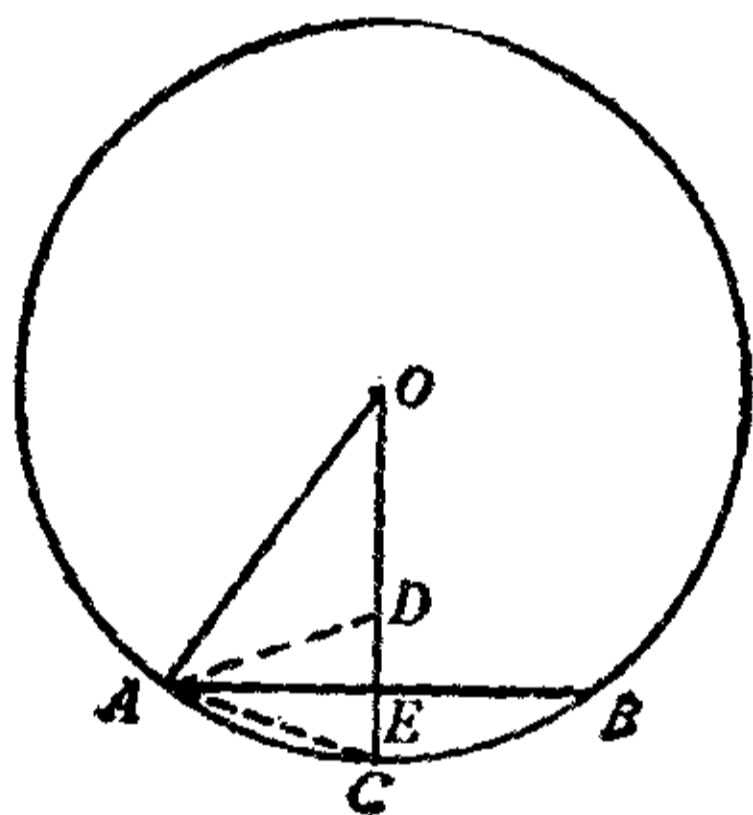


圖 14.

如图 14，设 AB 是圆 O 的内接正五边形的一边 (用 a_5 表示)， C 是 \widehat{AB} 的中点，那末 AC 是内接正十边形的一边 (用 a_{10} 表示)。作 $\angle OAC$ 的平分线，交半径 OC 於 D 。

因为

$$\angle O = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ,$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ,$$

所以

$$\angle OAD = \frac{\angle OAC}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ,$$

$$\angle ADC = \angle O + \angle OAD = 72^\circ,$$

因此

$$\angle O = \angle OAD, \angle OCA = \angle ADC,$$

所以

$$OD = AD = AC,$$

又因

$$\triangle OAC \sim \triangle ACD,$$

所以

$$OA : AC = AC : CD.$$

就是

$$1 : a_{10} = a_{10} : 1 - a_{10},$$

那末

$$a_{10}^2 + a_{10} - 1 = 0$$

$$a_{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

取 $-\sqrt{5}$ 不合,所以

$$a_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

又因 OC 垂直平分 AB , $\angle O$ 是銳角,

所以

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OC \cdot OE.$$

就是

$$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = 2 - 2 \cdot OE,$$

所以

$$OE = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

再由勾股弦定理得:

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{1 - \left[\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) \right]^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

所以

$$a_5 = AB = 2 \cdot AE = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

現在要直接把圓分成五等分, 只要把已知圓的半徑当做單位線段, 設法作一線段等於 $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ 就得了.

等於 $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ 的線段能不能作呢?

它是由有限多次的加減乘除和開平方得出的, 因此知道它是可以作出的.

从上面我們举的一些簡單式子所表示的線段的作圖方法可以看出,如果能把这个式子化成 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的形式,就可以利用勾股弦定理来作出.

参照上面得出这个式子的演算,很容易把它化成 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的形式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{4+5-2\sqrt{5}+1}{4}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

而

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}.$$

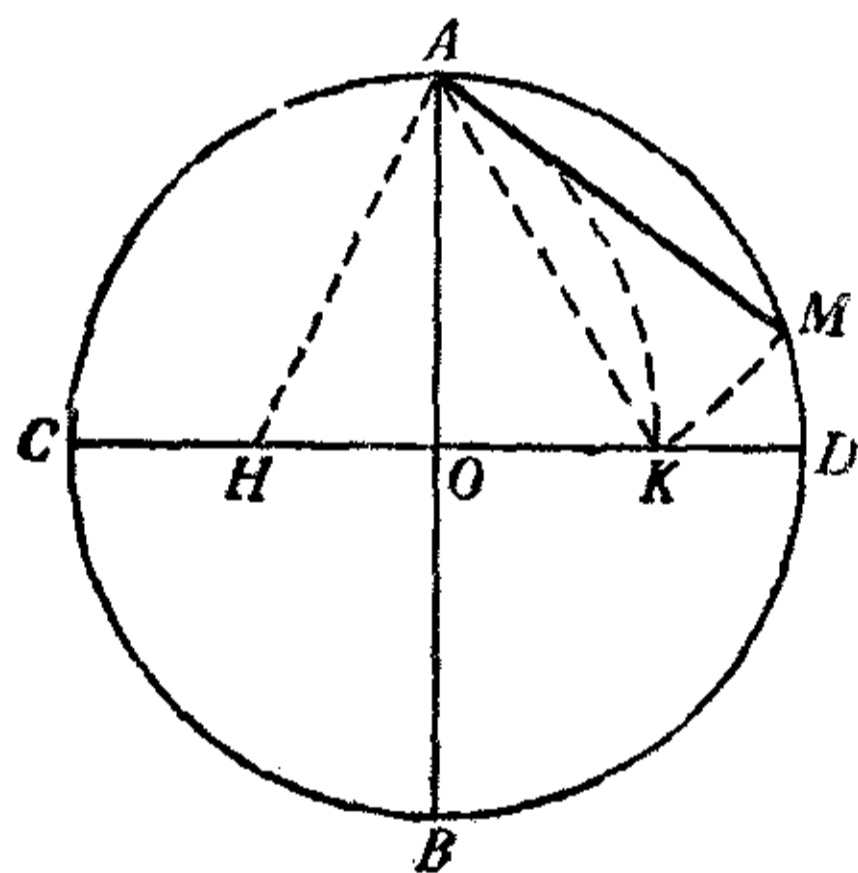


圖 15.

这样問題完全解决了,我們依据分析,可以有下面的作法,如圖 15:

1. 作已知圓(單位圓)的兩垂直直徑 AB 和 CD , 相交於圓心 O .
2. 平分 CO 於 H ($OH = \frac{1}{2}$).
3. 用 H 做中心, HA 做半徑作弧, 交 OD 於 K .

$$[HK = HA = \sqrt{AO^2 + HO^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$OK = HK - HO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.]$$

4. 用 A 做中心, AK 做半徑作弧, 交圓 O 於 M .

5. 那末 AM 就是已知圓里正五边形的一边，

$$\begin{aligned} \left[\text{因 } AM = AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2} \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}}. \right] \end{aligned}$$

你看，用代数的方法来分析几何作圖，真是簡單明白！

—— “不为” 和 “不能”

限定用直尺和圓規所以不可能三等分一角的道理。

現在，可以来着手解决我們的主要問題了，就是：为什么限定用直尺和圓規不可能三等分一角呢？要是單憑直尺和圓規来試，是無法判断究竟可能不可能的，只有借助於代数学，才能分析这一个問題。

如圖 16，假如 $\angle AOB$ 是一个任意給出的角，叫它做 α 。为了运算簡便起見，用角頂 O 做中心，單位長度做半徑，画一个弧，分別交角的兩边於 A 和 B ，那末 \widehat{AB} 是在 $\angle AOB$ 的内部，而这个角的兩条三等分射線也必然在角的内部，因此这两条射線就一定同 \widehat{AB} 相交得兩点。於是就可以把問題改变一下，就是在 \widehat{AB} 上求得它跟三等分角的射線的任一个交点，假如能够求得一个交点的話，問題也就解决了。我們設想 \widehat{AB} 上

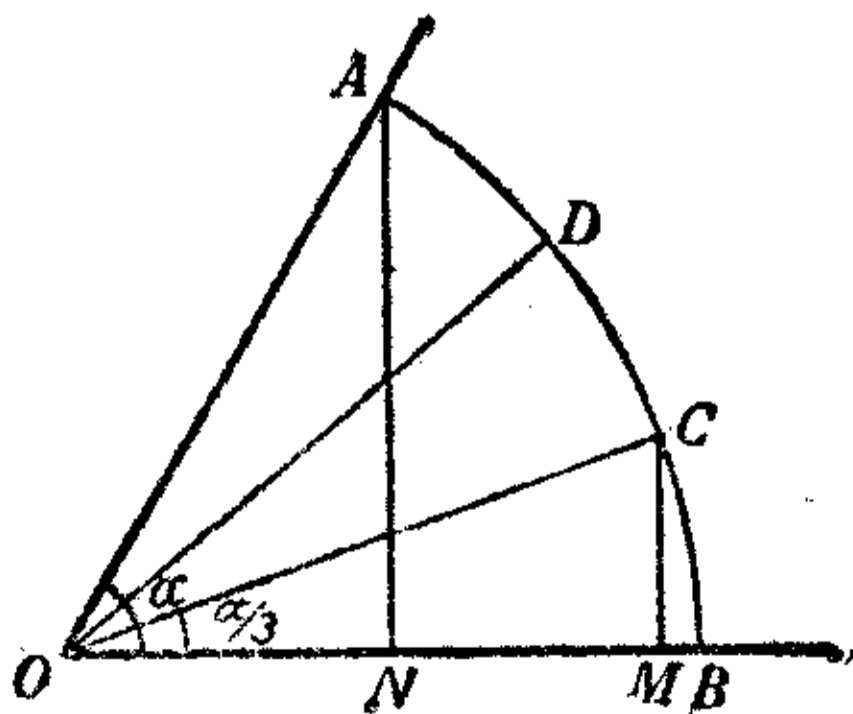


圖 16.

的 C 、 D 就是所求的点，从 C 和 A 分别作 CM 和 AN 垂直 OB ，这样，要是 \widehat{AB} 上的 C 点能求得，在 OB 上的 M 点也就一定能求得，反过来说也是一样，要是在 OB 上能求得 M 点，那末 \widehat{AB} 上的 C 点也可以确定。因此，我们要判断用直尺和圆规是不是能找到 C 点，可以先看看用直尺和圆规是不是能找到 M 点。那末我们怎样来找 M 点呢？看图上 OB 是已给角的一边，角顶 O 是固定的，假如能在 OB 上求出 OM 的长度是多少，那末 M 点也就确定了。现在问题又可以改变做求 OM 的长度了，这样一来，我们可以根据前面所谈的理论来决定 OM 的长度是不是可能作出。我们设 OM 是 x ，如果 x 可以用有限多次加減乘除和开平方的运算所构成的代数式来表示，那末我们也可以用直尺和圆规把它作出来，问题也就迎刃而解；若不是这样的话，那末这个作图就不是直尺和圆规的能力所及，也就是作图不可能问题。

怎样来用一个代数式表示 OM 的长度呢？我们只要应用一些简单的三角知识就够了。

如图 16，因 OA 和 OB 是单位圆的半径， α 又是定角， A 一定是定点，所以

$$ON = \cos \alpha \quad (\text{这个长度是已知的}),$$

$$x = CM = \cos \frac{\alpha}{3} \quad (\text{这个长度是未知的，也就是所求的}).$$

我们记得在三角里学到过， $\cos \alpha$ 和 $\cos \frac{\alpha}{3}$ 有这样的关系：

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3}.$$

現在設 $ON=a$ ，把 ON 和 OM 分別代入這個式子裡，得

$$4x^3 - 3x = a.$$

因此，我們要求得 x 的值（也就是表示它的長度的代數式），就只要解出這個方程的根。

在沒有動手研究這個方程的根以前，可以先注意一點，這裡的常數項 $a = \cos \alpha$ ，是隨着所給角 α 的大小而變化的。要一般地解出這樣一個三次方程，對我們來說還是有困難的，因此，我們可以先來考慮它的幾種特殊情形：

(1) 假設 $\alpha = 90^\circ$ ， $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$ ，就是 $ON = a = 0$ ，方程變成：

$$4x^3 - 3x = 0, \text{ 或 } x(4x^2 - 3) = 0.$$

這樣可以得出三個根： $x = 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。舍棄 0 根同負

根^①，我們知道 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 是符合於有限多次加減乘除和開平

方運算的規定的，所以是可以作圖的：

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

用單位長作直角三角形的斜邊，單位長的一半作一條直角邊，另一條直角邊便是所求的 OM 的長。事實上，余弦函數是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的小於 90° 的正角是 30° 。

① 余弦函數是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角是 150° ，實際上是 $(90^\circ + 360^\circ)$ 的三等分角；余弦函數是 0 的角是 270° ，實際上是 $(90^\circ + 720^\circ)$ 的三等分角。

(2) 假设 $\alpha = 135^\circ$, $\cos \alpha = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 就是 $ON = a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (a 在坐标上横轴的负向), 方程变成:

$$4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 或 } 8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0.$$

解这个方程, 可以得出三个根: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$. 后面两个根我们暂时不去管它^①, 只看第一个根 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 它是符合于有限多次加减乘除和开平方运算的规定的, 所以是可以作图的:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

用单位长的一半作一个等腰直角三角形的直角边, 斜边便是所求的 OM 的长. 事实上余弦函数是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的小于 90° 的正角是 45° .

(3) 假设 $\alpha = 180^\circ$, $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$, 就是 $ON = a = -1$ (a 在坐标上横轴的负向), 方程变成:

$$4x^3 - 3x = -1, \text{ 或 } 4x^3 - 3x + 1 = 0.$$

解这个方程可以得出三个根: $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$. 这三个数都是符合于有限多次加减乘除和开平方运算的规定的, 所以是可以作图的. 事实上, 余弦函数是 $\frac{1}{2}$ 的小于 90° 的正角是 60° ; 大于 90° 的角是 300° , 这是 $(180^\circ + 720^\circ)$ 的三等分角; 而

^① 余弦函数是 $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ 的角是 165° , 实际上是 $(135^\circ + 360^\circ)$ 的三等分角; 余弦函数是 $\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ 的角是 285° , 实际上是 $(135^\circ + 720^\circ)$ 的三等分角.

余弦函数是 -1 的角是 180° ，这是 $(180^\circ + 360^\circ)$ 的三等分角。

其余像 108° 的角，我們也可以应用黄金分割的方法作出 36° 的角，推开来說，所有可以像这样用直尺和圓規作出的角，它們的三倍角都可以用直尺和圓規来三等分。

那末是不是从这里可以推出：任意角都可以用直尺和圓規三等分呢？当然不能，根据特殊情况来概括一般情况，是会犯很大的錯誤的。我們知道这个方程里的常数項 a 的範圍是 $-1 \leq a < 1$ ，上面所举的 0 、 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 -1 等，畢竟是一些个別的值。我們要把所有的值一般地进行研究，固然还有困难，但是不妨反过来看一看，是不是有一些角不能用直尺和圓規三等分呢？假如可以找到的話，那末我們可以这样說：要一般地用直尺和圓規来三等分任意角，就一定是不可能的了。

現在我們就取一个 60° 的角来試一試。

假設 $\alpha = 60^\circ$ ， $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，就是 $ON = a = \frac{1}{2}$ ，方程变成：

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}, \text{ 或 } 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

現在要解出这个方程的根，事实上还不必把这个方程的根全部解出来，因为我們的主要目的是研究这个方程的根是不是可以作圖，也就是它有沒有根是由有限多次的加減乘除和开平方等运算符号所構成的式子来表示的。因此，我們只要研究这个方程是不是有有理根或者只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根存在，就可以了。

現在分几种情形来考虑。

(1) 在方程 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 里，是不是有有理根呢？这一点，我們完全不必解出这个方程，就可以来判别的，为了簡便起見，假設 $y = 2x$ ，那末方程就变成：

$$y^3 - 3y - 1 = 0.$$

假如这个改变后的方程有有理根的話，那末原方程也就有有理根，假如这个改变后的方程沒有有理根，原方程也就沒有有理根。

根据代数学的知識，假如 $y^3 - 3y - 1 = 0$ 有有理根的話，那末这些有理根一定是 -1 的因子，也就是 1 或 -1 ，現在分別把它們代入方程： $1 - 3 - 1 \neq 0$ ，又 $-1 + 3 - 1 \neq 0$ ，因此这个方程沒有有理根，也就是說原方程沒有有理根。

(2) 在方程 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 里，是不是有只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根存在呢？

所謂只含有开平方符号而沒有开高次方符号的無理根，最簡單的形式是 $M \pm \sqrt{N}$ ，这里 M 和 N 是有理数。我們假定有一根是 $M + \sqrt{N}$ ，那末用这个根代入这个方程，應該是适合的，就是下式應該成立：

$$\begin{aligned} & 8(M + \sqrt{N})^3 - 6(M + \sqrt{N}) - 1 \\ &= 8(M^3 + 3M^2\sqrt{N} + 3MN + N\sqrt{N}) - 6M - 6\sqrt{N} - 1 \\ &= 8M^3 + 24M^2\sqrt{N} + 24MN + 8N\sqrt{N} - 6M - 6\sqrt{N} - 1 \\ &= (8M^3 + 24MN - 6M - 1) + (24M^2 + 8N - 6)\sqrt{N} = 0. \end{aligned}$$

因为有理数部分跟無理数部分不会相等，所以只有

$$8M^3 + 24MN - 6M - 1 = 0,$$

$$24M^2 + 8N - 6 = 0.$$

我們再看看跟这个根相共轭的 $M - \sqrt{N}$ 是不是也是这个方程的根,把这个数代入这个方程的左端:

$$\begin{aligned} & 8(M - \sqrt{N})^3 - 6(M - \sqrt{N}) - 1 \\ &= 8(M^3 - 3M^2\sqrt{N} + 3MN - N\sqrt{N}) - 6M + 6\sqrt{N} - 1 \\ &= 8M^3 - 24M^2\sqrt{N} + 24MN - 8N\sqrt{N} - 6M + 6\sqrt{N} - 1 \\ &= (8M^3 + 24MN - 6M - 1) - (24M^2 + 8N - 6)\sqrt{N}. \end{aligned}$$

由上面得出的关系,可以知道这个式子一定等於0,所以 $M - \sqrt{N}$ 也适合这个方程,就是 $M - \sqrt{N}$ 也是这个方程的一个根.

这就指出了,方程假如有 $M + \sqrt{N}$ 的根存在,那末必有另一个根 $M - \sqrt{N}$ 存在.

另外,在代数学里,我們知道 n 次方程必有 n 个根,所以三次方程也必定有三个根,而且这三个根同方程里各項的系数有一定的关系. 现在看看它們的关系是怎样的.

假設有一个三次方程是 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ①.

我們設它的三个根分別是 α, β, γ , 於是得:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

这个式子兩端相应各項的系数應該相等,所以

$$\alpha + \beta + \gamma = -p, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \quad \alpha\beta\gamma = -r.$$

根据上面第一个式子,回头来看一下我們前面所討論的方程 $8x^3 - 6x - 1 = 0$, 这里 x^2 項的系数 p 是 0. 假如方程有

① 假如一个三次方程的 x^3 項系数不等於 1, 那末各項用 x^3 項的系数除, 就可以化成 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的形式.

$M \pm \sqrt{N}$ 两个根的话, 那末 $\alpha = M + \sqrt{N}$, $\beta = M - \sqrt{N}$. 於是得:

$$(M + \sqrt{N}) + (M - \sqrt{N}) + \gamma = 0, \text{ 所以 } \gamma = -2M.$$

这里 M 是有理数, 可知这个方程要是 $M \pm \sqrt{N}$ 两个无理根的话, 另外一个根一定要是有理根, 这显然同前面(1)所得的结论矛盾. 就归谬法的道理, 知道这个方程是不可能有像 $M \pm \sqrt{N}$ 这种形式的根的.

(3) 除了 $M \pm \sqrt{N}$ 这种形式以外, 只含有开平方符号而没有开高次方符号的无理根是不是还可能有别的形式呢? 有, 那就是含有双重根式的, 标准形式就像 $M \pm \sqrt{N \pm \sqrt{L \pm \sqrt{K}}}$, 这里 M, N, L, K 是有理数. 我们就假定这个方程有一个双重根式的无理根 $M + \sqrt{N + \sqrt{L + \sqrt{K}}}$. 为了说明方便起见, 我们用 A 代 $M + \sqrt{N}$, 用 B 代 $L + \sqrt{K}$, 这里 A, B 是含一重根式的无理数. 那末上面这个双重根式的无理根就可以写成 $A + \sqrt{B}$. 根据前面(2)所讨论的, 显然可以推出这个方程一定同时有一个共轭的根 $A - \sqrt{B}$, 而第三个根应该等于 $-2A$. 但是 A 既然是一个含一重根式的无理数, 这就跟前面(2)所得的结论矛盾. 就归谬法的道理, 知道这个方程是不可能有像 $M \pm \sqrt{N \pm \sqrt{L \pm \sqrt{K}}}$ 这种形式的根的.

从(3)的讨论可以看出, 这个方程也不可能有含三重、四重……根式的根. 因为如果有含三重根式的根, 一定会推出同时有一个含双重根式的根, 这又跟(3)所得的结论矛盾; 如果有含四重根式的根, 一定会推出同时有一个含三重根式的根, 这也是跟已得的结论矛盾的. 其余可以依此类推.

於是我們可以得出結論：

方程 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 的根是不能由有限多次的加減乘除和开平方的运算式子表示出来的，也就是說，用直尺和圓規不能把 60° 的角三等分。其实，除去了可分的一些特殊角之外，你不选 60° 而选定其他的角，一定会有同样的遭遇。

現在，我們又該小結一下了。

这个古老的、曾經耗費了許多数学家腦力的几何作圖題，从笛卡兒發現了数和形的对应关系以后，总算漸漸地得出結論来了。人們解决一个問題的时候，往往先从它的正面（可能的一面）着手，但当遇到困难的时候，也就会考虑到它的反面（不可能的一面），到了人們已經有充分理由可以說明問題是不可能的，那問題也同样算是解决了。三等分一角問題就是这样的例子，在笛卡兒以前的相当長的时期里，人們認為它是一个难题，現在看来，要用直尺和圓規来三等分一角，不是难而是根本不可能。因此过去認為是个沒有解決的問題，現在應該說是已經解決的問題，或者說是不成問題的問題。

記得我国古代孟軻所著的書里有这样几句话：“挟泰山以超北海，非不为也，是不能也。为長者折枝，非不能也，是不为也。”現在，我們对这个問題也可以說是“非不为也，是不能也”。

最后，有一点是要指出的，前面我們所論証的，还不是十分严密的，但这並不是說這個問題不能够严密地来論証，只是要严密地来論証，就要用到比較高深的数学知識。应用比較高深的数学知識，我們可以完全严密地論証上面結論的正确，

不过就从我們上面所作的比較粗淺的論証，也已經可以使我們相信，用直尺和圓規來三等分任意角，是一件根本不可能的事。

一二 跳出了圈子

应用别的曲線來三等分一角，尼哥
米德蚌線。帕斯卡對線。

我在前面說過，除去一些应用特制的工具之外，在数学上还有別的方法来作出一角的三等分線。这些方法又是怎样的呢？

古代的数学家想用直尺和圓規作出一角的三等分線遭到失敗以后，就很自然地会想到，假如跳出这个圈子，是不是能够解决这个问题呢？也就是說，不限定用直尺和圓規來作直線和圓，而是用另外一些曲線，是不是能把它作出来呢？这方面的工作已經有許多人做过，而且有了不少的成就，当中比較著名的，是在公元前 180 年左右的大数学家尼哥米德。他应用了他所發現的非常著名的蚌線，很容易而且順利地解决了三等分角的問題。蚌線也跟直線和圓一样，是符合於某一特定条件的点的軌跡。这个軌跡的圖形很像蚌壳的邊緣，所以叫它做蚌線，数学上为了紀念这位偉大的發現者，又叫它做尼哥米德蚌線。大数学家牛頓在研究三次、四次曲線的时候，也曾經应用了这个曲線。

蚌線是这样的一种軌跡：

如圖17, 有一定点 O 和一条定直線 l , 它們的距离 OM 長是 a . 經過 O 点的一条动直線 l' 遇定直線 l 於 Q , 在动直線 l' 上取兩点 P 、 P' , 使 PQ 和 $P'Q$ 都等於常数 b . P 、 P' 的位置随着动直線 l' 的位置变动而变动, 这两个动点 P 、 P' 的軌跡就是蚌線.

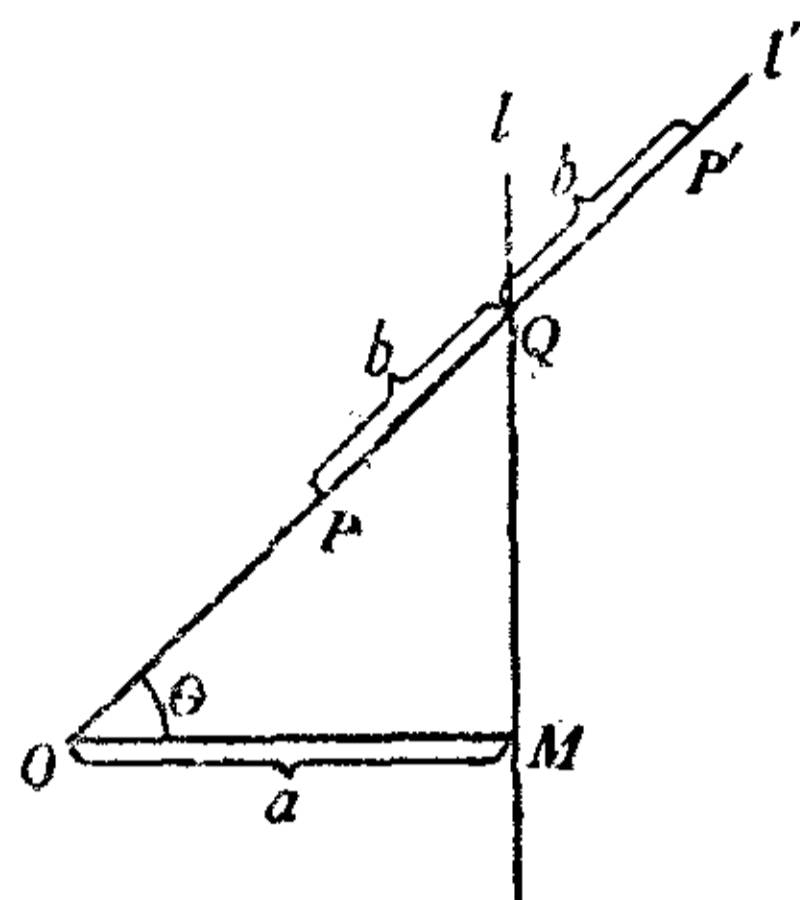


圖 17.

我們很容易把蚌線作出来, 並且因了 a 大於、等於或小於 b , 可以作出三种蚌線来(圖 18).

利用蚌線的特性, 我們可以很順利地来三等分一个任意角.

如圖 19, 設 $\angle BAC$ 是所要三等分的角, 用角的一边 AB 做一边, 角的另一边 AC 做一条对角線, 作一个矩形 $ABCD$. 現在我們認定 A 做定点, BC 做定直線, 从 A 作一条直線

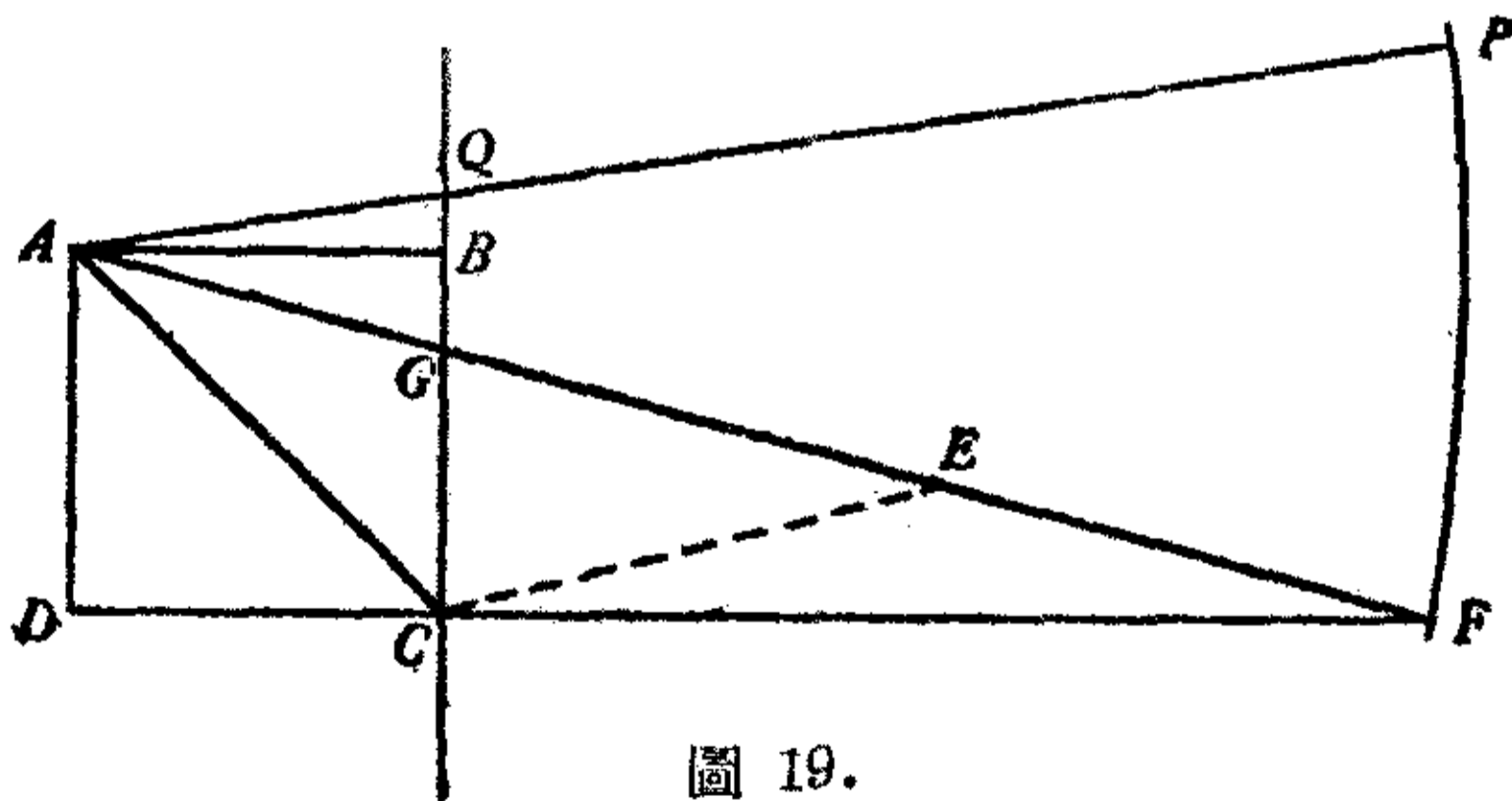


圖 19.

(动直線) 交 BC 於 Q , 在这条动直線上取一点 P , 使 $PQ = 2AC$, 那末 P 的軌跡就是 $b > a$ 的蚌線, 不过这里只採用它的右枝.

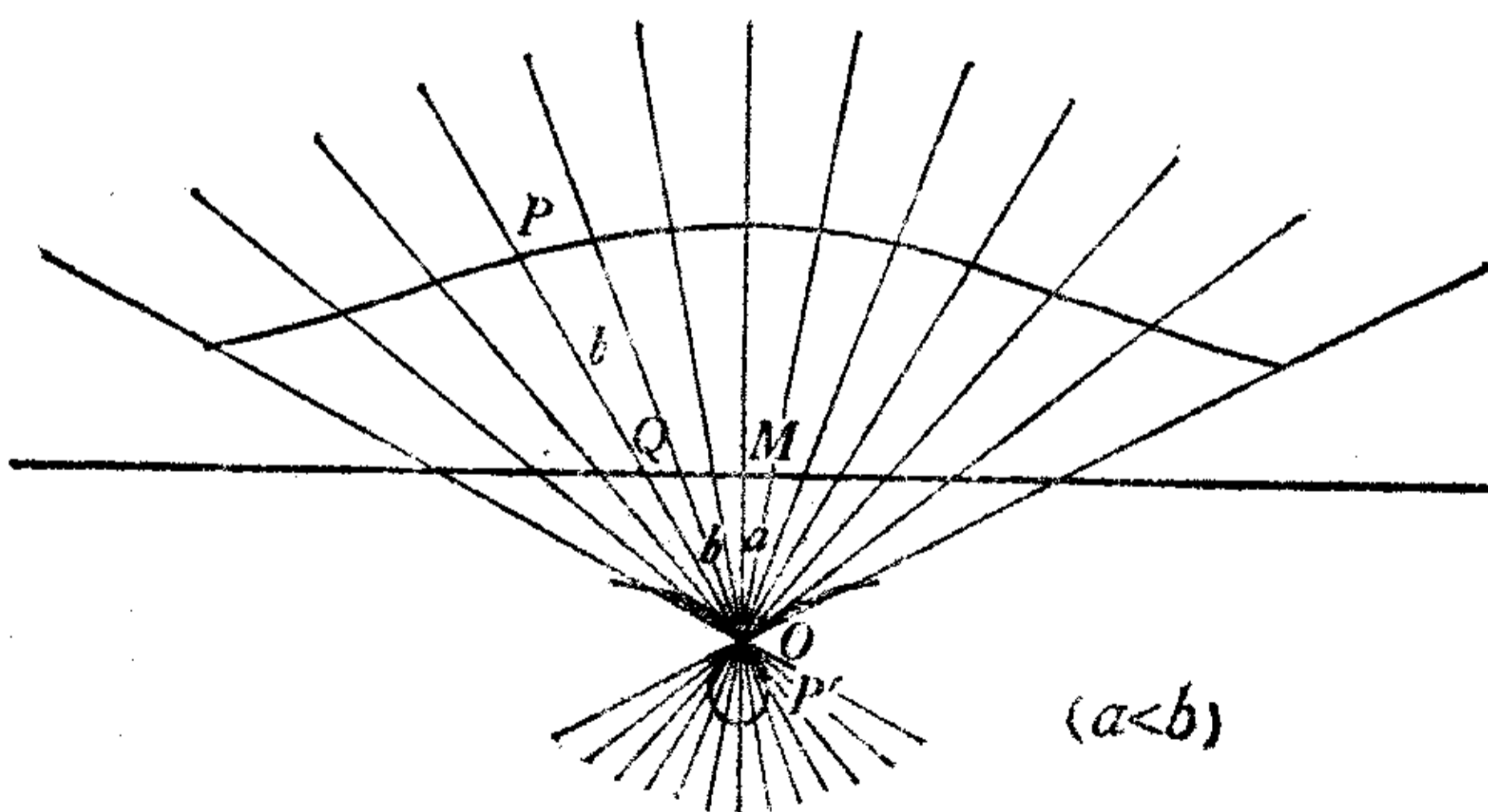
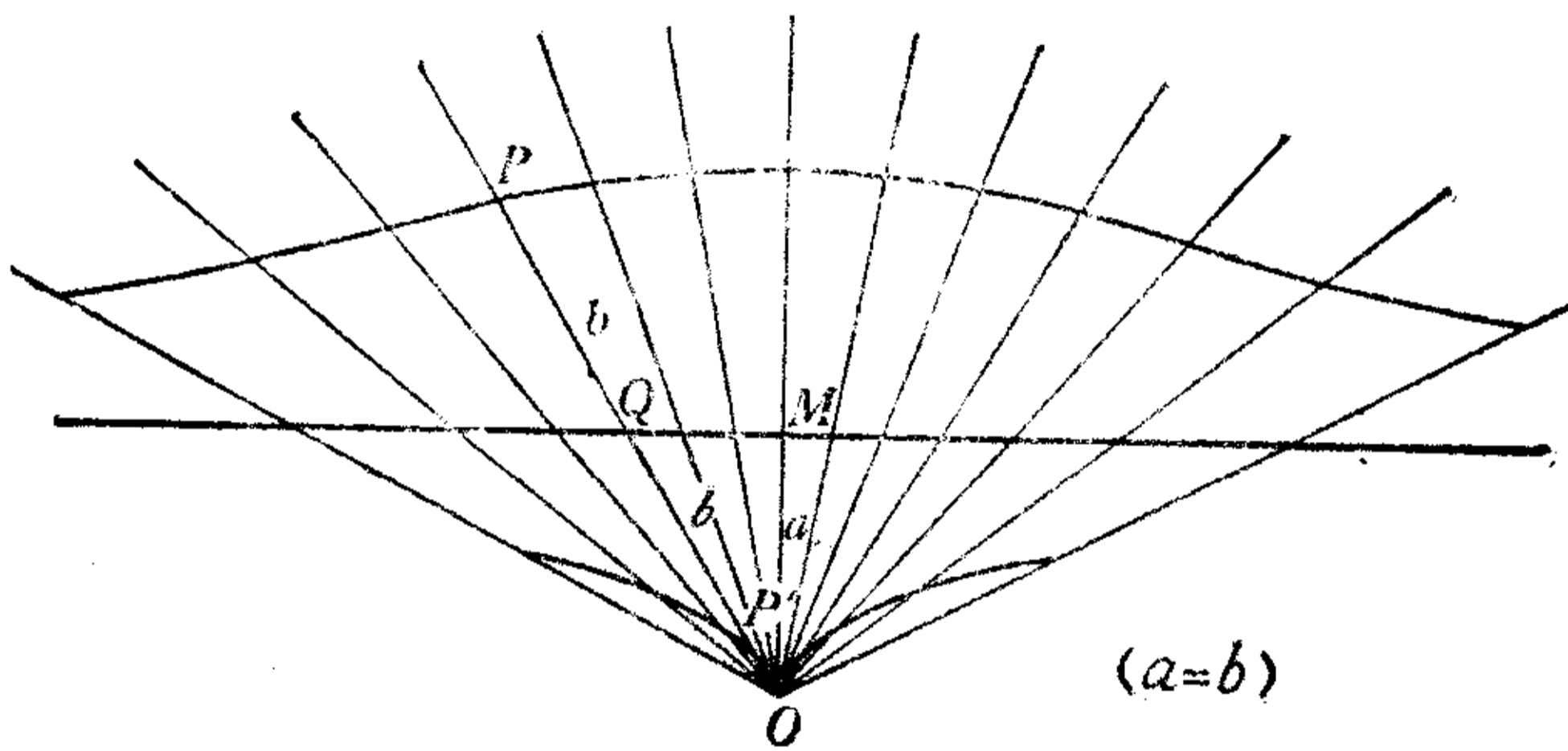
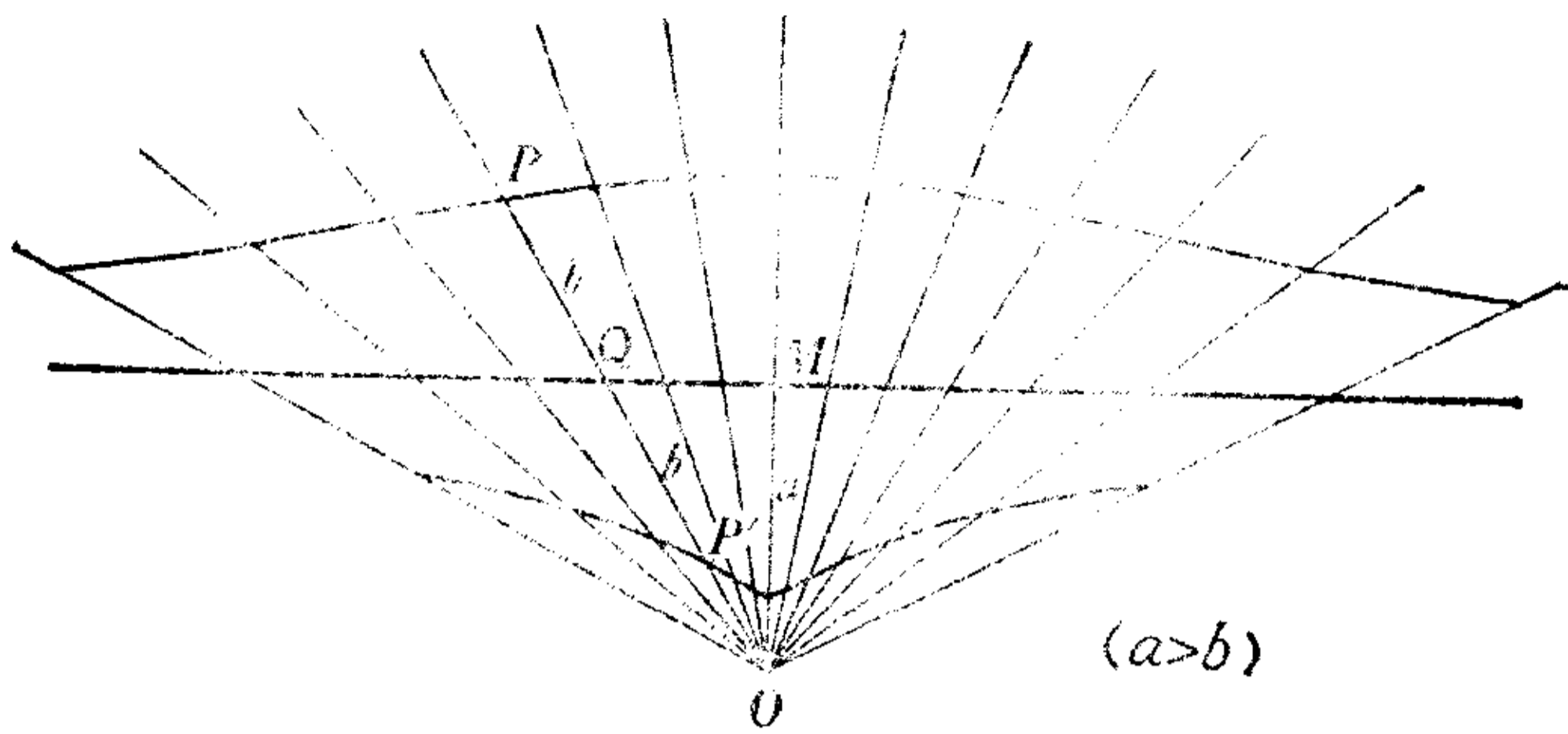


圖 18.

再延長 DC 跟这蚌線相交於 F ，連 AF ，那末

$$\angle BAF = \frac{1}{3} \angle BAC.$$

这是容易証明的，設 AF 和 BC 的交点是 G ，取 GF 的中点 E ，連 EC 。

因为 $\triangle GCF$ 是直角三角形，所以 $CE = EF$ 。又根据蚌線的性質，可得

$$EF = AC,$$

所以

$$EF = CE = AC.$$

所以 $\angle CAE = \angle CEA = \angle ECF + \angle EFC = 2\angle EFC$ 。

又因为

$$AB \parallel DF,$$

所以 $\angle EFC = \angle BAF$ ， $\angle CAE = 2\angle BAF$ 。

而

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \angle BAF + \angle CAE \\ &= \angle BAF + 2\angle BAF = 3\angle BAF, \end{aligned}$$

所以

$$\angle BAF = \frac{1}{3} \angle BAC.$$

除了用尼哥米德蚌線以外，也还可以用別的曲線。例如离开今天大約三百多年光景，法国的一位天才数学家帕斯卡發現了蚌線（因为这曲線同蚌壳的形狀很相似），也有人叫它蝸線或心臟線。就在这时候，法国有一位叫洛白福尔的，利用它来解决了三等分一角的問題。

蚌線是这样的一种軌跡：

如圖 20，圓上有一定点 O ，从 O 作这个圓的弦 OR ，在 OR 和它的延長線上取兩点 P 、 P' ，使 $RP = RP' = a$ ， a 是一个常

線), 蚶線和角的另一边 OB 相交於 E , 連 CE , 由 O 作 $OF \parallel CE$, 那末

$$\angle FOB = \frac{1}{3} \angle AOB.$$

这可以这样来証明: 設 CE 和定圓的交点是 D , 連 OD . 根据蚶線的性質, 可得

$$DE = OD = OC.$$

所以 $\angle OCD = \angle ODC = \angle DOE + \angle DEO = 2\angle DEO$.

而 $\angle AOB = \angle OCD + \angle DEO$
 $= 2\angle DEO + \angle DEO = 3\angle DEO$.

又因为 $OF \parallel CE$, 所以 $\angle DEO = \angle FOB$,

因此 $\angle FOB = \frac{1}{3} \angle AOB$.

这条曲線能够十分簡便地来解三等分角問題, 所以有时候人們也叫它做三等分角曲線. 其实, 解决这个問題的特殊曲線还有很多, 即使是比較熟悉的双曲線也能完成这项任务, 但是我們在这里不再一一列举了.

一三 从一个神話談起

倍立方体問題.

現在, 我們开始把目标轉向另外一些問題上, 这些問題在数学史上同三等分一角問題一样佔有重要的地位.

据說大約在公元前四百多年, 古代希臘的雅典流行了伤

寒症，雅典人为了想消除这个灾难，便向德里地方的日神（司音乐、诗词、口才、医药和美术的神）求助。神说：“如果要使病疫不流行，除非把我殿前的立方体香案的体积扩大一倍。”这个条件使雅典人很兴奋，他们认为这是容易做到的，于是把旧香案的各棱放大一倍，做了一个新的立方体香案，放在神的面前。结果，日神大怒，疫势更加猖獗。于是雅典人再去祈祷日神，方才知这样做的新香案的体积并不是等于旧香案的两倍。那末究竟应该怎样做呢？这可把当时的人们难住了，即使是像当时负有盛誉的学者柏拉图，也认为这是一件非常困难的事。

这就是著名的倍立方体问题，就是已知一立方体，求作另一立方体，使它的体积等于已知立方体的两倍。由于有上面那样的神话传说，所以有人也叫这个问题做“德里问题”。

当然，我们上面说的只是一个神话，不过我们却可以从这里看出一点，这个倍立方体问题同三等分一角问题一样，也是一个古老的作图问题，曾经由古代的一些数学家研究过的。

而且，这也是同三等分一角一样，是一个用直尺和圆规作图的不可能问题。

把这个问题说得明确一些，就是已知一立方体的棱长是 a ，求作另一立方体的棱长 x ，使新立方体的体积 x^3 是原来立方体体积 a^3 的两倍。

要粗浅地证明这是一个作图不可能问题，倒并不十分困难。为了简便起见，我们不妨设 $a=1$ ，也就是已知立方体的棱长是 1 单位，这样，这个立方体的体积便是 $1^3=1$ 。根据题

意,知道求作的立方体的体积應該是 $2 \times 1 = 2$ 所以求作立方体的棱長 x 是 $\sqrt[3]{2}$, 而要从單位長1用有限多次的加減乘除和开平方算出 $\sqrt[3]{2}$, 是不可能的, 所以倍立方体問題也是不能用直尺和圓規来解决的.

尽管这样, 我們却不能說它是用別的方法也無法實現的. 它同三等分一角的問題一样, 可以用一些工具把它作出; 也可以利用一些曲線的特性把它作出; 即使用直尺和圓規, 我們也可以把它近似地作出来, 在实用上是不会帶來什么妨碍的.

現在, 我就來說明某一些方法, 或許會使你感到兴趣.

用木工常用的角尺兩根, 就可以很順利地解决这个問題. 为了說明这种方法, 我們先証明一个關於对角線互相垂直的直角梯形的定理:

在对角線互相垂直的任何直角梯形里, 对 角 線 交 点 所 分 成 的 線 段 構 成 几 何 級 数, 如 圖 23, $\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{b}$.

設在直角梯形 $ABCD$ 里, $\angle A$ 同 $\angle B$ 是直角, 对 角 線 DB 跟 AC 互相垂直. 於是根据在直角三角形里斜边上的高是兩条直角边在斜边上的射影的比例中項, 可以看出, 在直角三角形 ABD 里, $\frac{a}{y} = \frac{y}{x}$. 同样在

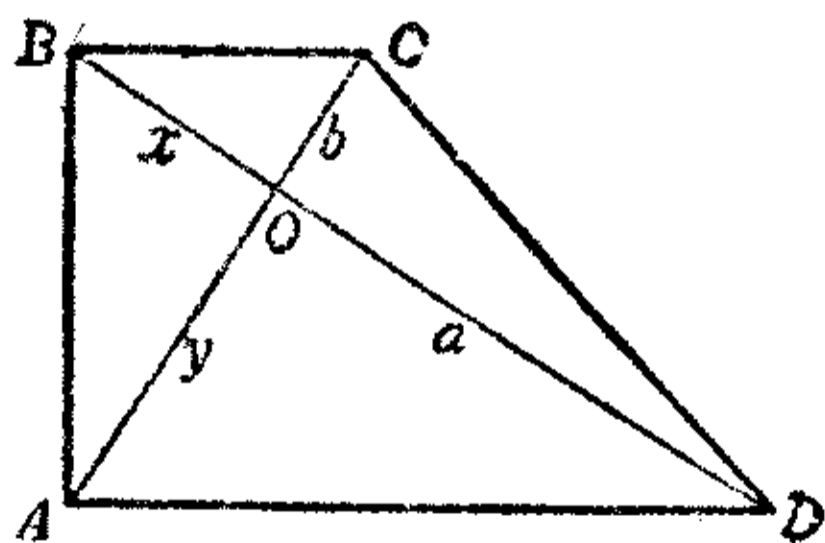


圖 23.

直角三角形 ABC 里, $\frac{y}{x} = \frac{x}{b}$. 所以 $\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{b}$.

於是得 $y^2 = ax, x^2 = by$.

把這兩個方程联立起来解, 可以得到一組根: $x = \sqrt[3]{ab^2}$,

$$y = \sqrt[3]{a^2b} \text{ ①.}$$

現在假定 $a=2, b=1$ 。我們就得到 $x = \sqrt[3]{2}$ 。
 这样不就可以解决这个問題了嗎?

方法是这样的:

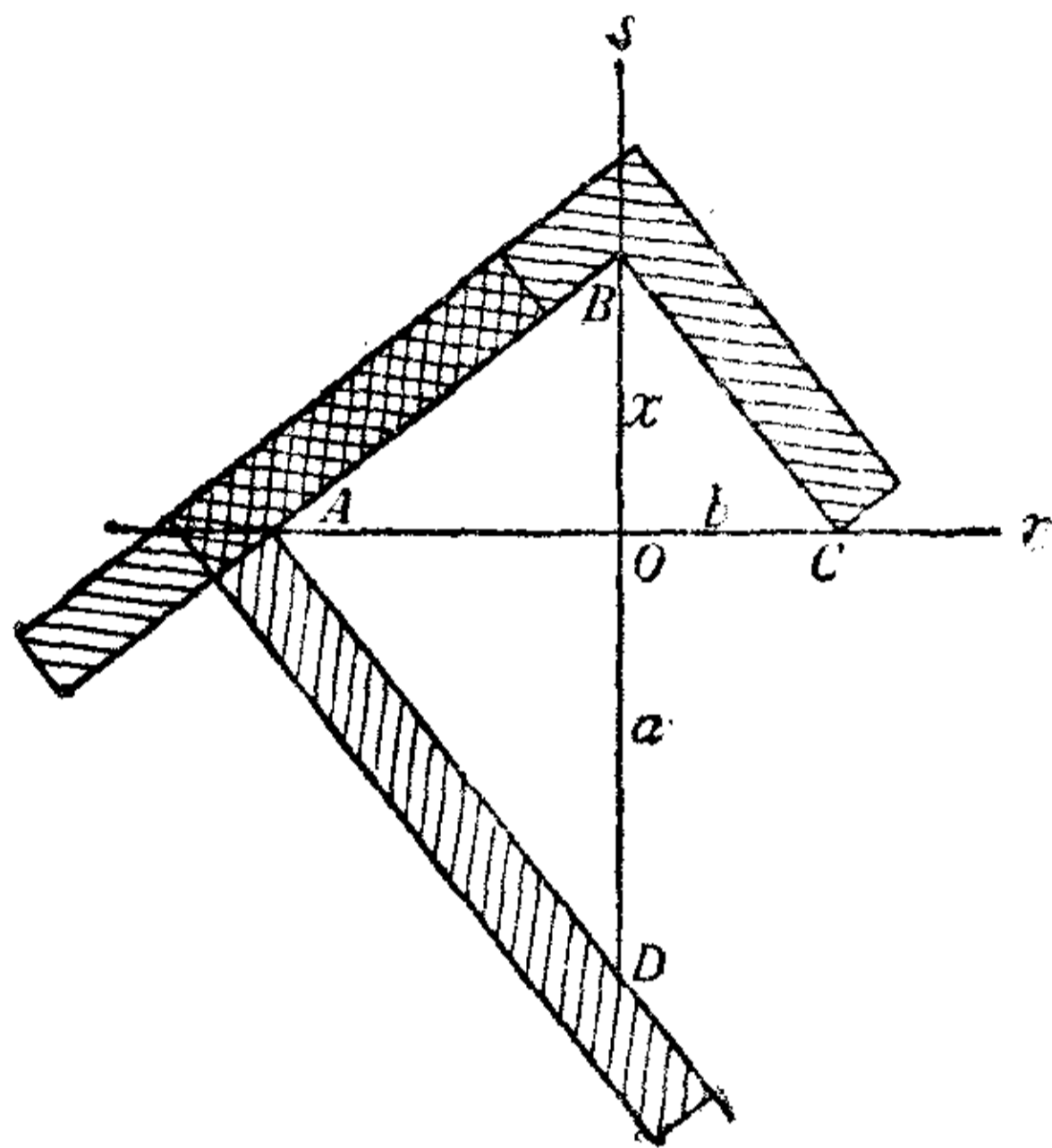


圖 24.

如圖 24, 作兩條互相垂直的直線 r 和 s , 從它們的交點 O 起在 r 上截取線段 $OC = b = 1$, 在 s 上截取線段 $OD = a = 2$. 現在我們用這兩根角尺相對疊合起來, 使兩個直角頂 A 、 B 分別落在直線 r 和 s 上, 而兩條直角邊分別通過 D 點和 C 點, 現在線段 $OB =$

x , 就是所求的倍立方體的稜長。

利用這種工具来解决這個問題的方法, 在很古的時候就知道了, 據說就是柏拉圖首先提出的。

由於這個作法的啓示, 柏拉圖的學生, 另一位古代希臘著名的幾何學家、研究幾何圓錐曲線的鼻祖孟尼哥馬首先應用了他所發現的圓錐曲線里的拋物線, 巧妙地解出了這個問題。

如圖 25, 在笛卡兒坐標上根據方程 $y^2 = 2x$ 和 $y = x^2$ 描出

① 另一組根 $x=0, y=0$, 在這裡沒有用處。

兩条拋物線來，於是根據方程組圖解的理論和前面的討論，很容易看出除去原點這一個交點外的另一個交點 A 的橫坐標就是所求的線段。

當然，這個問題也跟三等分角問題一樣，還可以利用別的一些曲線的特性來解決，譬如公元前大約 200 年，希臘數學家帝屋哥利發現的蔓葉線，有一種著名應用就是解決倍立方體問題。前面談過的尼哥米德蚌線，也可以用來解決這個問題。

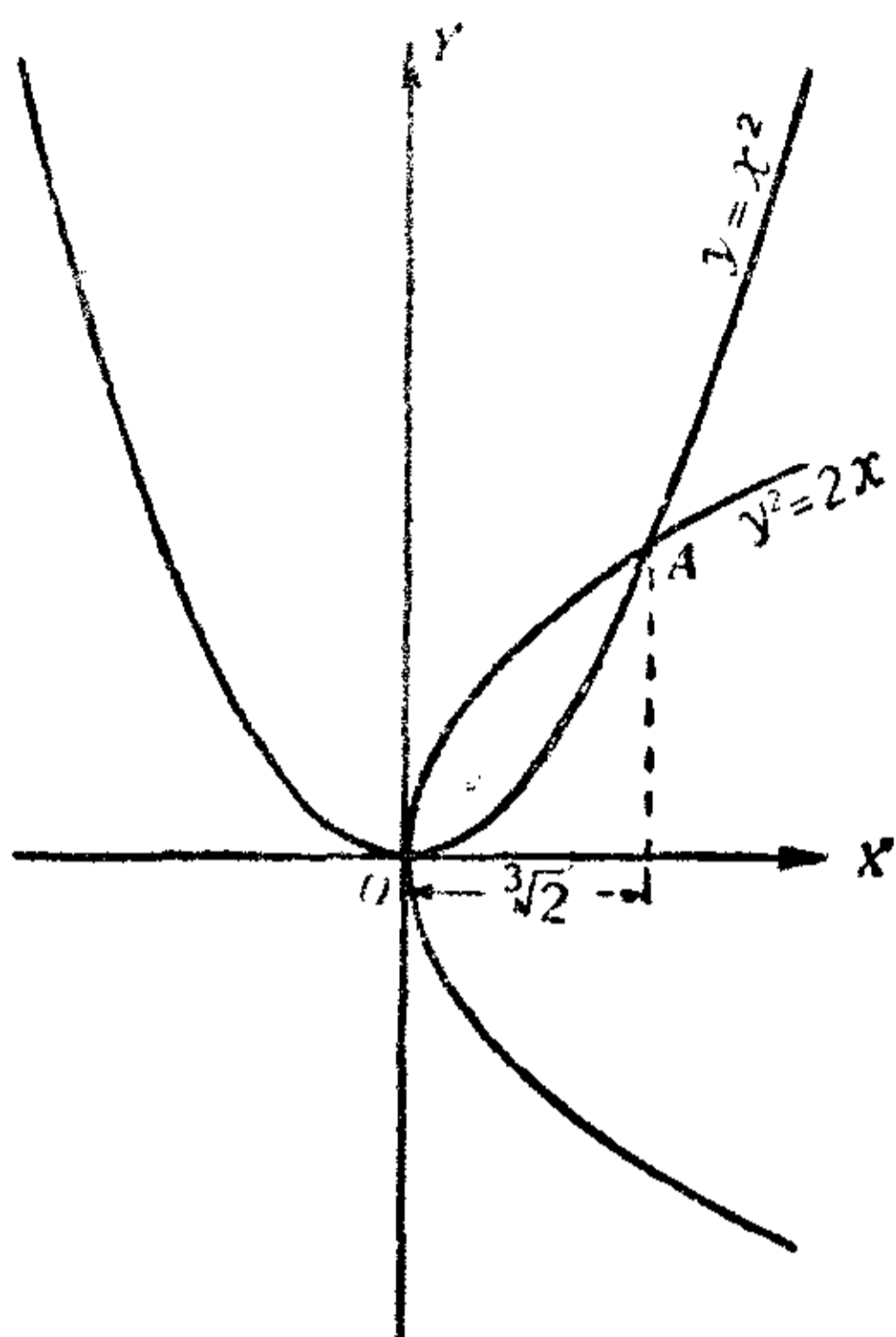


圖 25.

現在我想介紹一個關於這個問題的用直尺和圓規的近似作圖法。這種方法是有實用意義的，因為實際應用的時候，並

不需要我們絕對嚴密和精確。即使有些本來可以嚴密地加以論證的問題，我們為了簡便起見，也常採用它的近似作法呢！

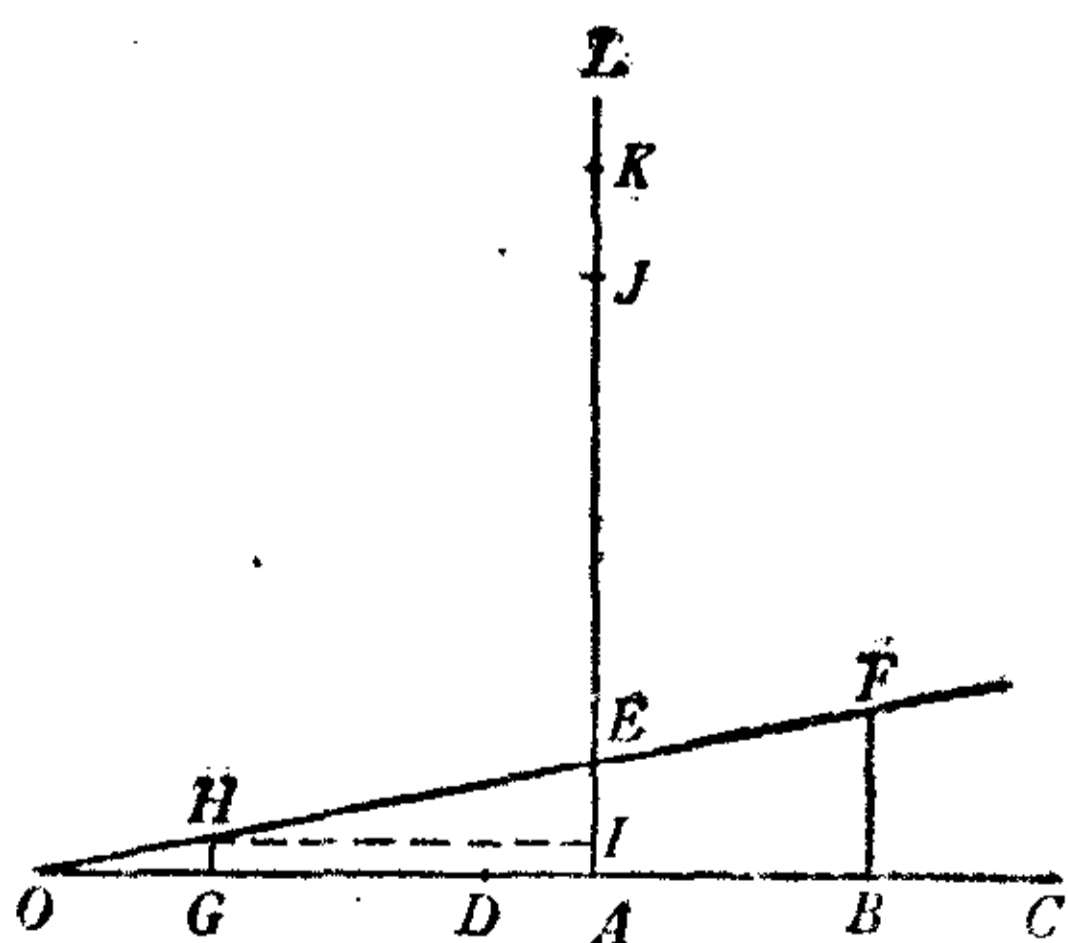


圖 26.

如圖 26，設 OA 是單位長，先把它五等分，設 $DA = \frac{1}{5} OA$ 。延長 OA 到 C ，在 AC 上取 $AB = \frac{1}{2} OA$ 。在 A 點作

一直線 AL 垂直 OI ，取 $AE = DA = \frac{1}{5}OA$ ，連 OE 線並且把它延長，在 B 點作一直線 BF 垂直 AC ， BF 跟 OE 線在 F 點相交，再取 $OG = BF$ ，又在 G 點作一直線垂直 OA ，跟 OE 相交於 H ，在 AL 上取 $AI = GH$ ， $IJ = OA$ ， $JK = DA$ ，那末 AK 大約等於 $\sqrt[3]{2}$ 。

因為 $\frac{OB}{OA} = \frac{3}{2}$ ，所以 $OB = \frac{3}{2}OA$ ，又 $\frac{AE}{OA} = \frac{1}{5}$ ，因而 $OG = BF = OB \cdot \frac{AE}{OA} = \frac{3}{2}OA \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}OA$ ， $GH = OG \cdot \frac{AE}{OA} = \frac{3}{10}OA \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}OA$ ，於是

$$AK = AI + IJ + JK = \left(\frac{3}{50} + 1 + \frac{1}{5} \right) OA = 1.26 \cdot OA.$$

AK 的值是單位長的 1.26 倍，而 $\sqrt[3]{2}$ 的值大約是 1.25992，兩者比較，相差很微。倘若有一個立方體的稜長等於地球的直徑的話，要求兩倍這個立方體體積的立方體的稜長，依照前面所說的近似的方法來求，所得的長度跟正確的也只不过相差 0.05 里。

你或許會這樣說：“這方法也未免太麻煩了！何不干脆就算出 $\sqrt[3]{2}$ 的數值，直接量出它的長度呢？”

你說的真有意思，本來有些問題在實用上可以採用直接量度的方法的，我們不是說過用量角器也可以三等分一角嗎？至於我特別提出這個問題的近似作法，只是想說明我們不用直接量度的方法，也可以用直尺和圓規來處理這個問題，而且處理得還並不壞。

不過，雖說處理得不壞，它終究是一種近似的方法，所以

我們还是把它归在作圖不可能問題里面，這個問題是有名的三个作圖不可能問題之一。

提到有名的三个作圖不可能問題，我們既然已經講了兩個，第三个也自然非講一講不可。不过我們也不准备講得很詳細。

一四 算它最困难

圓积求方問題。

你大概做过許多几何上等积变形的作圖吧。譬如說：作一个三角形，使它和已知多边形等积；或者作一个正方形，使它和已知三角形等积。但是我如果問你，你能不能作一个正方形，使它的面积等於一个已知圓的面积呢？

你也許像有些人一样会这样回答：“圓是曲線所圍成的圖形，怎么可以把曲線所圍成的圓面积化成直線所圍成的正方形面积呢？”

这样說是不对的。还在很古的时候，人們就已經知道用直尺和圓規可以把用圓弧所圍成的比較复杂的圖形化成正方形。你总証过这样一个問題吧，這個問題几乎在所有几何課本里都可以找到：如圖 27，用直角三角形的弦做直徑的半圓跟用直角边的弦做直徑的半圓跟用直角边

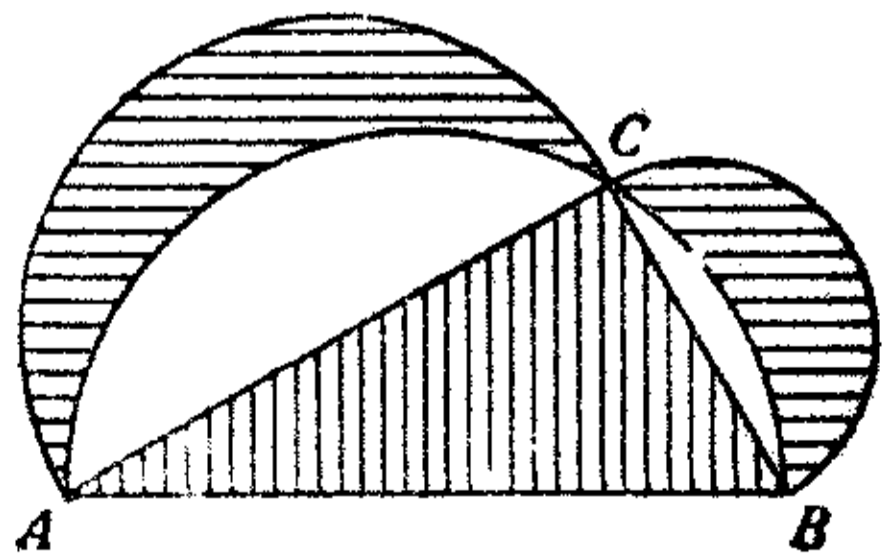


圖 27.

做直徑的半圓所夾的兩個鐮刀形(圖上有橫的陰影線部分)的面积的和,等於这个直角三角形的面积(圖上有直的陰影線部分)。这样說来,由曲線圍成的圖形是有可能只用直尺和圓規来化成直線圍成的圖形的。

然而要作一个正方形,使它的面积等於一个已知圓的面积,却确实是一个用直尺和圓規作圖的不可能問題。

这个問題叫圓积求方問題或化圓为方問題,或者簡單地就叫方圓問題。它同三等分一角和倍立方体問題一样,也有悠久的历史,費去了許多数学家的精力。在埃及的数学家阿·米斯所写的極古老的一本数学書里,就有关於这个問題的記載,这大概是由於生产实践提出了研究面积的需要的緣故。他所採用的方法是这样:把已知圓的直徑等分成九份,除去一份,把余下的八份做边作成正方形,就是所要求的。用現在的目光来看,这方法当然只是近似的,但这是出於極古老的数学書上的,自然还是值得我們注意的。很明显,假如这个正方形跟圓等积的話,那末 $\pi r^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$, 所以 $\pi = \frac{256}{81} = 3.160\cdots$ 这个数值已經相当精确了。事实上假如我們在实际問題上不需要怎样精密的話,这个世界上最古老的圓积求方法,还是可以採用的。

那末这个問題为什么用直尺和圓規不可能作出呢？

我們可以先作这样的分析:設圓的半徑 r 等於 1, 那末圓的面积就是 π , 於是所求作的正方形的一边應該是 $\sqrt{\pi}$ 。問題就只要考虑是不是能用有限多次的加減乘除和开平方来算出 $\sqrt{\pi}$, 或者,是不是能够算出 π 。

你会搶着說：“ π 不是無理數嗎？所以……”

所以不可能作出嗎？那你又錯了。因為有的無理數用直尺和圓規是完全可以正確地用作圖方法求出的。我們不是曾經談過直接作出五角星的方法嗎？那就只要先設法作出無理數 $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 就行了。因此， π 所以不能作出，並不完全因為它是無理數，而是由於它的另一個特性，就是它是一個“超越數”。這個性質是在 1882 年首先由德國數學家林德曼發現和證明的。但是什麼叫做“超越數”呢？所謂“超越數”，就是不可能是由某種有理系數的方程算出的數，也可以說，不是一個代數上的數，就是說這種數不能用通常代數學的運算方法求出，不能用含有加減乘除以及含常數指數的冪和根的有限代數項表示出來，即使用開立方、四次方、五次方等方法也是無法求出的。

由於 π 這個數有这样的特性，所以三個古老的初等幾何作圖不可能問題當中，在理論上說，要算這個圓積求方問題解決起來最困難了。

不過在實際生活當中這個問題倒也常常會遇到，人們也並沒有因它的困難而束手無策。跳出了直尺和圓規作圖的圈子外面以後，古代幾何學家梁拉多達維奇用了一種非常巧妙的方法，把這個問題解決了。

我們設已知圓的半徑是 r ，那末圓的面積就是 πr^2 ，圓周長是 $2\pi r$ 。假如把圓面積 πr^2 化成正方形的話，那末正方形每邊的長應該是 $\sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$ 。

但是我們可以把問題稍為改變一下，因為 $\pi r^2 = \frac{2\pi r^2}{2} =$

$2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, 所以假如用 $2\pi r$ 和 $\frac{r}{2}$ 做两边, 做成一个矩形, 这个矩形的面积就也等於已知圆的面积, 作出了这个矩形, 再求作等积的正方形, 问题就简单了.

然而怎样来作出这个矩形呢? 梁拉多达维奇採用了下面的方法:

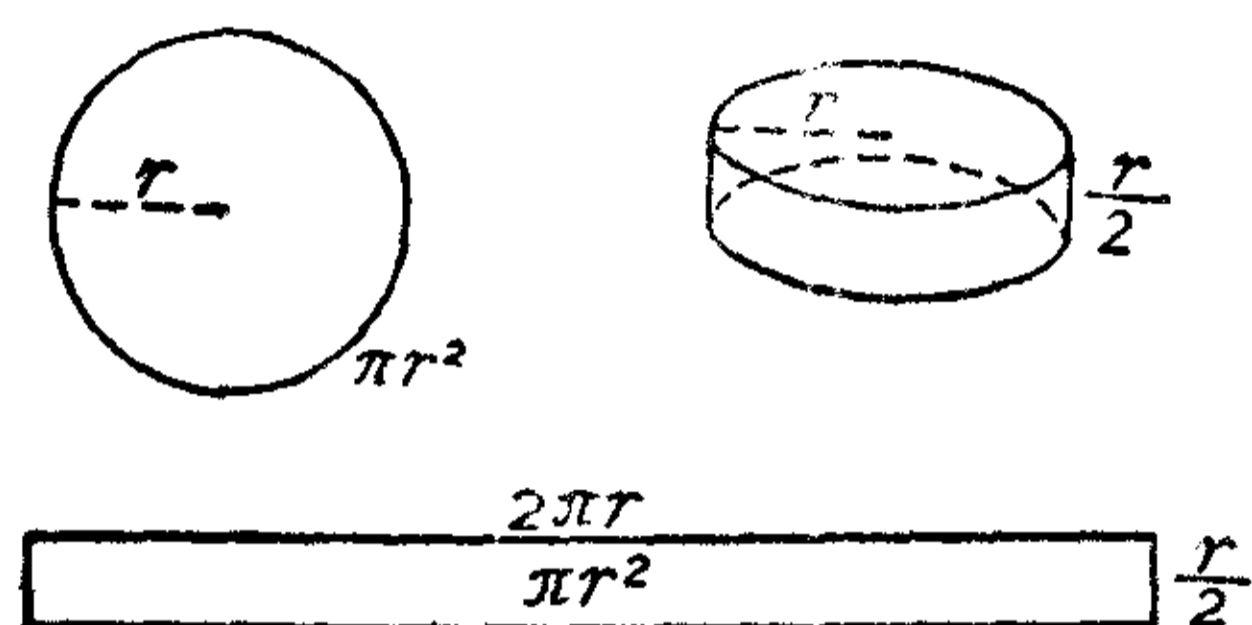


圖 28.

如圖 28, 先作一个直圆柱, 用已知圆做它的底面, 用已知圆半径的一半做它的高. 把这个圆柱当做輪盤, 讓它在平面上滾一周, 它滾

到的地方便是一个矩形. 显然, 这矩形的面积就等於已知圆的面积.

照这样看, 所謂圓积求方问题的关键就在於怎样用線段来表示圓周的長, 也就是圓周長的展开問題.

“關於圓周長的展开問題, 几何課本上不是介紹了很多作法嗎?” 你会提醒我說.

是的, 不过我也要反过来提醒你, 这些都只是近似的作法, 因为圓周長的展开本来也是一个不可能作圖問題. 圓积求方問題也好, 圓周長的展开問題也好, 基本上都是一个作出 π 的問題, 而 π 既是一个超越数, 自然不能用直尺和圓規作出.

至於在实际生活当中, 我們遇到要把圓周展开的問題, 也可以根据实际問題所需要的精确程度, 来採用各种近似的作

法。譬如箍桶的工人就常用徑一周三的方法，要更精确些可以用 $3\frac{1}{7}$ 作为 π 的值。假如要有更高的精确度，也可以採用阿多萊魯的方法：

如圖 29，作圓的直徑 AB 和在 B 点的切線 CD ，作 $\angle BOC = 30^\circ$ ，取 $CD = 3OB$ ，連 AD 。 AD 就近似於半个圓周的長。

因为 $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $BC = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ 。而

$$BD = 3r - \frac{\sqrt{3}}{3}r = \frac{r(9 - \sqrt{3})}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } AD &= \sqrt{(2r)^2 + \left\{ \frac{r(9 - \sqrt{3})}{3} \right\}^2} = r\sqrt{4 + \frac{(9 - \sqrt{3})^2}{9}} \\ &= \frac{r}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} \approx 3.14153r. \end{aligned}$$

把这个数和 π 的五位小数值 3.14159 来比較，它的誤差不过是 $0.00006r$ ，这在实用意义上看，可以說是非常精密了。

有一点應該指出：假如利用圓周長的展开来近似地

解圓积求方問題，它的誤差要比圓周展开的大些，因为圓周長是一次量，而面积是二次量。

另外，用一个特殊的三角板，也可以近似地解决这个問題，並且在实用上非常便利。这是 1836 年俄国工程师宾格所首創的，所以这个特殊三角板就叫“宾格三角板”。

这个三角板是根据这样的原理制造的：

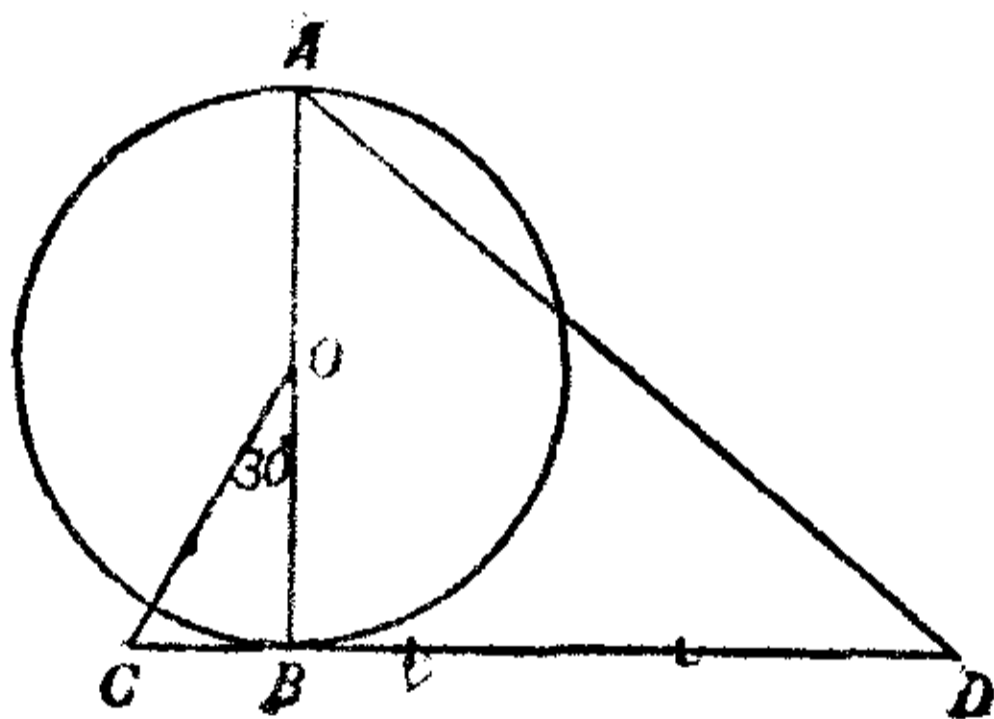


圖 29.

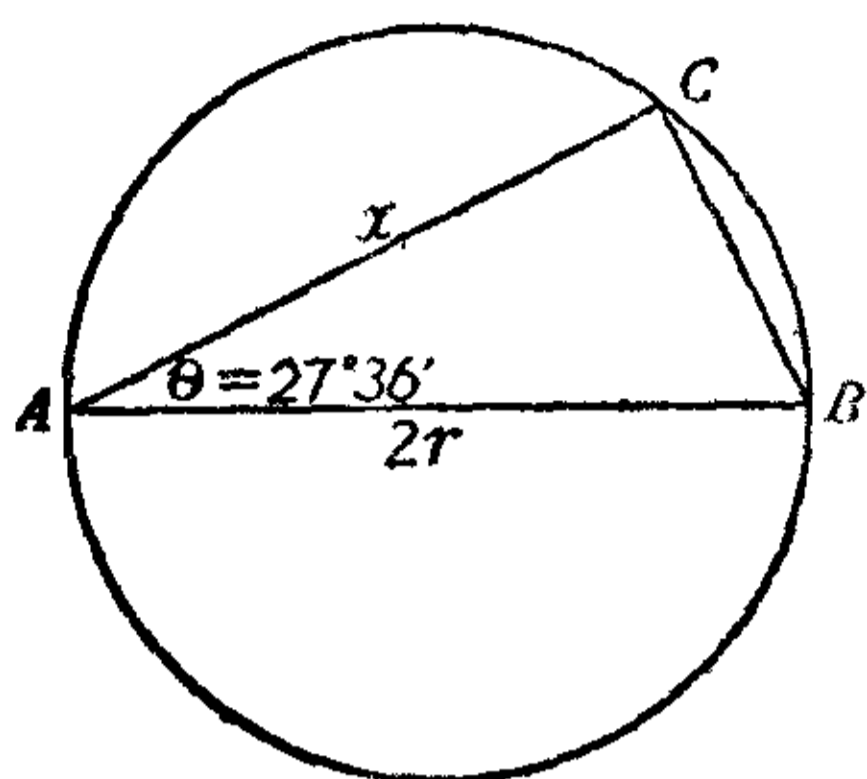


圖 30.

如圖 30, 在一个半徑是 r 的圓里作一条弦 AC , 和直徑 AB 成一個角 θ , 使这弦的長 x 恰巧等於跟圓的面积相等的正方形的边. 現在求这个角 θ 應該是多少. 我們知道 $\angle ACB = \angle R$, 所以

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}.$$

也就是所求的正方形的边長 $x = 2r \cos \theta$, 它的面积等於 $4r^2 \cos^2 \theta$.

从另一方面說, 这个正方形的面积應該等於圓的面积 πr^2 , 因此

$$4r^2 \cos^2 \theta = \pi r^2,$$

从而
$$\cos^2 \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862.$$

从三角函数表里可以找到 $\theta = 27^\circ 36'$.

这就是說, 我們只要作一条和直徑成 $27^\circ 36'$ 的角的弦, 就馬上得到面积跟这圓差不多相等的正方形的边了. 为了方便起見, 我們也可以先做出一个現成的直角三角板, 使它的一个銳角是 $27^\circ 36'$, 这样就可以用这块三角板随时求出跟任何一个圓等面积的正方形的边長了.

假如有人要求得到更高的精确度, 那我們也可以应用計算的方法, 因为在今天 π 的值已經算得十分精确了, 而且在理論上說, 可以計算到任意精确的程度. 不过就实用意义上說,

只要得出相当精确的近似值的解答,也就已經很够了.法国天文学家阿拉哥就曾經这样說过:“追求跟圓等面积的正方形的人們,在繼續做这个题目的演算,其实这一个题目的不可能解答,如今早已正式証明出来.而且,即使这个解答可能实现的話,在实用上也不会帶來絲毫好处的.”

然而,也並不是絕對沒有精确的方法来解决这个问题的.在理論上,利用高等数学里的圓积線 $(y = x \cot \frac{\pi x}{2r})$,也是可以解答这个问题的.

一五 一些錯誤的想法

別再把宝貴的时间浪費在这些已經是不成問題的問題上.

“是不是除去前面所講的三个問題以外,还有別的作圖不可能問題呢?”你听我几次提到“三个作圖不可能問題”,一定会提出这一个疑問来.

当然还有,而且多得很,我們不是曾經得出了这样的結論嗎?——如果一个長度不能由已知的長度用有限多次的加減乘除和开平方算出的話,便不能由已知的長度用欧氏作圖法作出.因此,有些几何作圖題,通过代数的解析,如果得出了像上面所說的結果,那就是作圖不可能問題.而且有些作圖不可能問題表面上看来似乎很簡單,如:过二定直線間的一定点,求作一直線,使它夾在二定直線間的部分是定長.你初看一定認為这是一个比較容易的作圖問題,其实它就是一个作

圖不可能問題。又如：你總該知道已知三角形的三中線或三高求作三角形的兩個作圖題吧，它們各有好幾種作法。但是你是不是曾經考慮到已知三角形三角的平分線求作三角形的問題呢？中線、高和角平分線不同樣是三角形里的主要線段嗎？因此在上面兩個作圖問題的基礎上，你就有可能連想到它。然而我告訴你，它也是個作圖不可能問題。

類似這樣的問題還可以舉出很多來！

那末為什麼我們在研究幾何作圖不可能問題的時候，老是先提到三等分一角、倍立方體和圓積求方問題呢？這道理也不是不容易想像到的：一來因為這些問題在表面上看來似乎很簡單，而在作圖的過程里卻遇到了極大的困難；二來這三個問題都有二千多年的悠久歷史，它們已經費去了許多數學家的精力，絞盡了許多數學家的腦汁，因此，它們也很自然地被人們認做是作圖不可能問題當中的典型問題了。

直到目前，這三個典型問題還引起許多學習數學的人們的興趣。

對於這些問題感興趣，如果從而探討它們所以不可能的道理，進一步引起你去學習高等數學的興趣，那倒並不是一件壞事。遺憾的是，有許多人並不是用正確的方法來研究這些問題，他們不相信這些問題在初等幾何里作圖的不可能性，却為它們表面的簡單形式所迷惑，認為這些問題一定能解出，就絞盡腦汁想去解決它們。他們也不能對証實這些問題的不可能性的理論提出什麼相反的意見，有的甚至不懂得這些理論，有的還以為目前雖然不能，將來或許有可能，其實他們的這些想

法都是錯誤的，他們这样做只是在浪費他們寶貴的時間，結果却是注定要失敗的。

這些人的做法也有各種各樣：

有的是單憑直觀想來解決這一些問題，他們想當然地說明一下，甚至圖形畫得非常複雜，顯然，這種作法是經不起考驗的。

有的是把直尺和圓規的使用方法改變一下，譬如我們前面說過的直尺圓規合併使用或直尺上添加刻度等方法，但是這是跟初等幾何的作圖公法不相合的。

有的在作圖的過程當中，暗地里運用了非直線和圓的曲線軌跡上的點。這些方法有的是正確的，但是這跟我們所說的作圖不可能問題無關，而像這種用別的曲線的方法，其實在很古的時候，就有許多人發現了不止一種了。

也有的人在遭遇到失敗以後，想把問題變換成別的作圖題形式，以為這樣一來或許可以使作圖變成可能，這種嘗試也一定是不會成功的。我們知道作圖不可能問題並不只是限於前面所說的三個，從這三個變出來的任何作圖題也一定是不可能的。

對於這樣的人，我提出一個忠告：別再把寶貴的時間浪費在這些已經是不成問題的問題上。

但是另一方面，也有些人記住了這些作圖問題的不可能性，卻忘記了這只是限於用直尺和圓規才不可能作圖，因此他們在實際生活當中遇到了這些問題的時候，就束手無策，還認為這是理論決定的。這也同樣是錯誤的。

所以，总的說来，这些所謂初等几何上作圖不可能問題，在今天不論在理論上或是實踐上，都是早已得到滿意的解答的，在这方面已經用不到我們再去白費精力了。

現在，党和政府正在号召我們向科学进军，我們要响应这个号召，訂出自己的學習計劃来。假如我們还没有足够的基础知識，就應該脚踏实地循序漸进地学好基础知識；假如我們已經有了足够的基础知識，那末科学技术上需要我們去研究的問題多得很，我們有辽闊的天地供我們活动。假如你对数学特別有兴趣，那在我們新中国也有很好的条件讓你向这一个方向去进军。你知道我国在数学的某些方面的成就已經达到了国际水平，我国也有世界上第一流的数学家。只要你有毅力，有耐心，肯刻苦鑽研，独立思考，你也一定会有所成就。但是你一方面要善於独立思考，一方面也要善於接受前人已有的成果。就像几何作圖不可能問題，既然前人已經解决，就用不到我們再去鑽牛角尖，否則只会把自己送进不可自拔的泥坑。